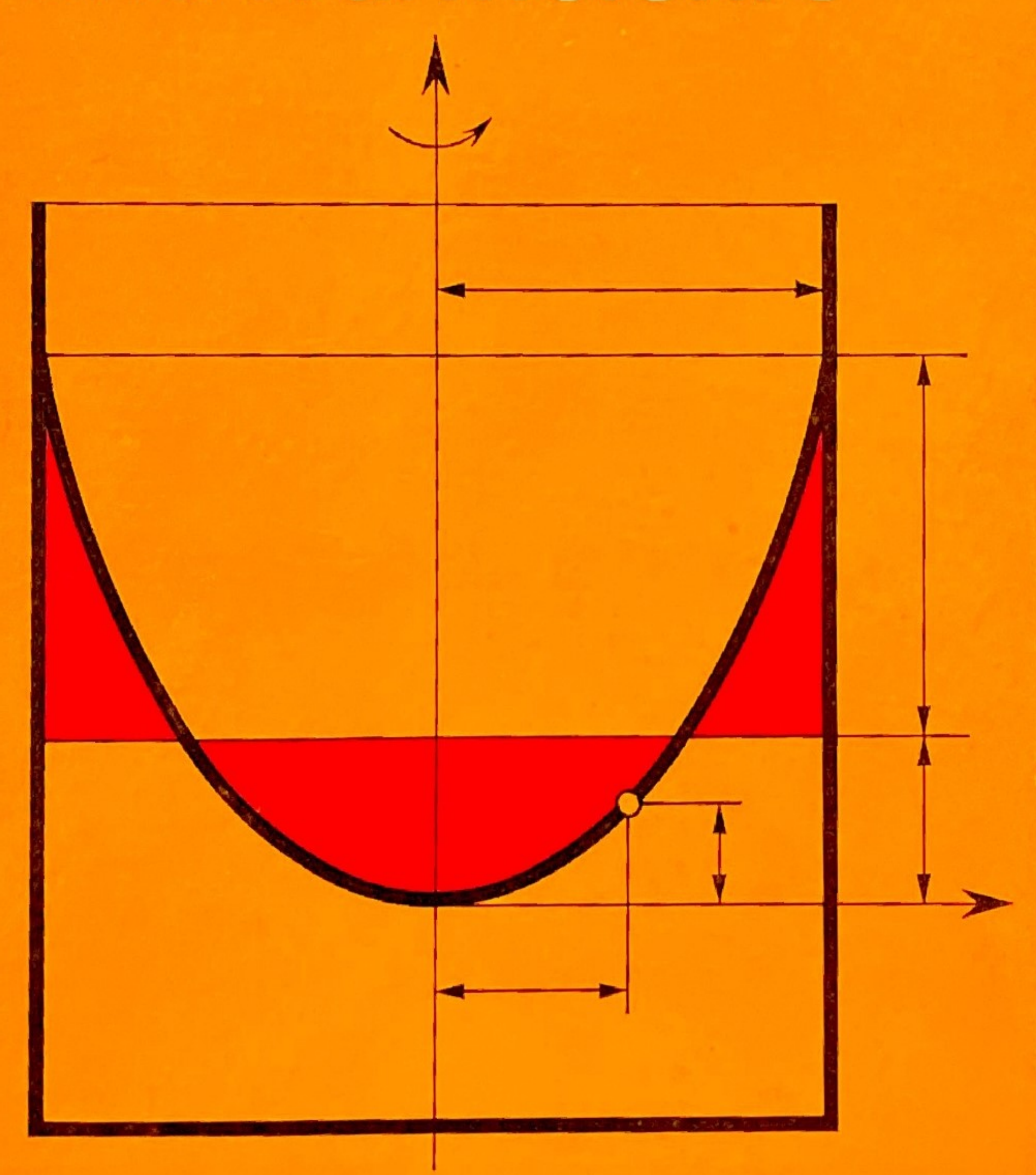
Mechanik und Wärmelehre

HAJKO



PHYSIK IN BEISPIELEN

Physik
in Beispielen

Mechanik
und Wärmelehre

Physik in Beispielen

Mechanik und Wärmelehre

von Prof. Dr. rer. nat. VLADIMIR HAJKO, Košice

Mit 200 durchgerechneten Beispielen

und 257 Aufgaben mit Lösungen

4. Auflage

1977

VERLAG HARRI DEUTSCH

ZÜRICH · FRANKFURT/MAIN · THUN

Dieser Band entspricht den Abschnitten 1. und 2. des Buches
Hajko: Physik in Beispielen
Titel des slowakischen Originals: Fizika V Prikladoch, Alfa-Verlag Bratislava/ČSSR 1962
Deutschsprachige Ausgabe nach der 2. Auflage des slowakischen Originals
Übersetzer: Dipl.-Slawist ERWIN WEISS KUKA, Leipzig
Wissenschaftlicher Bearbeiter: Prof. Dr. phil habil. GERHARD POPPEI, IHS Wismar

ISBN 3 87144 227 5

© dr. V. Hajko 1960
Rechte der deutschsprachigen Übersetzung: © VEB Fachbuchverlag Leipzig,
Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun
Printed in GDR
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 15.8 . 1976

Vorwort

Aus dem Vorwort des slowakischen Originals

Im vorliegenden Buch wird an Hand von gelösten Beispielen und Aufgaben mit Resultatangabe die Anwendung von Gesetzen und Rechenmethoden aus denjenigen Bereichen der Physik erläutert, die den wesentlichen Inhalt der Kursvorlesung „Experimentalphysik“ an Technischen Hochschulen ausmachen. Obwohl das Buch in erster Linie als Lehrmittel für Studierende technischer Disziplinen gedacht ist, wird es aber auch den an naturwissenschaftlichen Fakultäten immatrikulierten Hörern der ersten Studienjahre gute Dienste leisten. Es soll zur Verringerung der Schwierigkeiten beitragen, denen die Studierenden bekanntermaßen bei der Anwendung physikalischer Gesetze auf konkrete Beispiele begegnen.
Den einzelnen, in sich geschlossenen Teilen vorangestellt, faßten wir jeweils in Form einer Einleitung die Definitionen der physikalischen Größen, Gesetze und Lehrsätze zusammen, die sich auf den Lehrstoff des zugeordneten Teils beziehen, um dem Leser bei der Bearbeitung der Beispiele die Möglichkeit zu geben, den Inhalt der erforderlichen Größen und Beziehungen unmittelbar zu rekapitulieren, ohne dabei andere Bücher konsultieren zu müssen. Dennoch besteht wohl kein Zweifel daran, daß vor der Lektüre dieses Werkes oder parallel dazu das Studium eines Lehrbuchs der Physik erfolgen muß.

Vorwort der deutschsprachigen Ausgabe

Die Physik ist eine der wichtigsten Grundwissenschaften für die Ausbildung und Arbeit des Ingenieurs. Als eine für die moderne Technik wesensbestimmende Naturwissenschaft durchläuft sie – zusammen mit der von ihr erfaßten und durchsetzten Technik – einen tiefgreifenden und komplizierten Entwicklungsprozeß. Der Ingenieur

in erster Linie – aber auch der Naturwissenschaftler, der aus der Praxis erwachsende Probleme mit spezifisch physikalischen Mitteln und Methoden in Angriff nimmt, benötigt in hohem Maße die Fähigkeit, allgemeine Erkenntnisse und Prinzipien von Fall zu Fall auf ganz konkrete Sachverhalte anwenden zu können. Erfahrungsgemäß aber bereitet gerade diese Aufgabe dem Studierenden und nicht minder dem jungen Absolventen technischer und naturwissenschaftlicher Fakultäten besondere Schwierigkeiten, während die allgemeinen Prinzipien an sich, in ihrer naturgesetzlich fixierten Allgemeingültigkeit, durchweg zum lückenlos reproduzierbaren Wissensinhalt gehören.

Die vorliegende Sammlung von Beispielen und Aufgaben erscheint geeignet, wesentlich zur Behebung dieser Schwierigkeit, allgemeine Prinzipien konkret anwenden zu können, beizutragen. Vom Studierenden in Verbindung mit einem Lehrbuch und der Vorlesung benutzt, sollen die Bücher „Physik in Beispielen" Mittler und Wegweiser zwischen den „reinen Höhen" der Theorie und den mühsam, aber unumgänglich notwendig zu beherrschenden Ebenen der wissenschaftlichen Praxis sein.

Der deutschsprachigen Ausgabe liegt die 2. Auflage des slowakischen Originals zugrunde. Entsprechend den IUPAP-Regeln wurden gegenüber dem Original Änderungen der Größen und Einheiten vorgenommen. Die zu den einzelnen Aufgaben angegebenen Resultate entsprechen von Fall zu Fall den mit Schul-Logarithmentafeln oder Rechenstab erzielbaren Genauigkeitsansprüchen. Für die neue Ausgabe wurden alle Rechnungen weitestgehend auf SI-Einheiten umgestellt, deren umfassende Anwendung sich mehr und mehr durchsetzt. Lediglich in einigen Aufgabenstellungen und Zwischenergebnissen wurden alte, noch gebräuchliche Einheiten (z. B. kp, atm, Torr, cal) beibehalten, so daß das für die Übergangszeit nötige Umrechnen geübt werden kann.

Einem vielfach geäußerten Wunsch entsprechend, wurde die bisherige einbändige Ausgabe in zwei selbständige Teile zerlegt. Der Band „Mechanik und Wärmelehre" enthält die Abschnitte 1. und 2. der früheren Fassung. Die restlichen Abschnitte erscheinen unter dem Titel „Elektrik, Optik, Quantentheorie" unabhängig von diesem Buch in einem weiteren Band.

Bearbeiter und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Mechanik

1.1. Kinematik des Massenpunktes

Der **Ortsvektor** $\vec{r}$ eines Raumpunktes kann in bezug auf den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems mittels der rechtwinkligen Koordinaten des obengenannten Raumpunktes durch folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ Einheitsvektoren in Richtung der zugehörigen Koordinatenachsen).
Die **Geschwindigkeit** des in Bewegung begriffenen Punktes wird durch die Beziehung

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

definiert. Unter Bezugnahme auf Gl. (1) für den Ortsvektor kann man schreiben:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k},$$

d. h.,

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Wenn die Geschwindigkeitskoordinaten v_x, v_y und v_z gegeben sind, läßt sich der absolute Wert für die Geschwindigkeit ermitteln aus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{2}$$

Die Geschwindigkeitsrichtung bestimmen wir mittels der Winkel α, β und γ, die die Geschwindigkeitsrichtung mit den Richtungen der einzelnen Koordinatenachsen x, y

und z bildet. Für diese gelten die Beziehungen

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}. \tag{3}$$

Die **Beschleunigung** des sich bewegenden Punktes wird durch die Beziehung

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

definiert. Weiterhin gilt:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k},$$

d. h.,

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Für den Zusammenhang zwischen den Beschleunigungskoordinaten a_x, a_y und a_z und dem absoluten Wert der Beschleunigung sowie für die Winkel, die die Beschleunigungsrichtung mit den Richtungen der Koordinatenachsen bildet, gelten analoge Beziehungen wie die Gln. (2) u. (3).

Bei einer geradlinigen Bewegung kann für den Betrag der Geschwindigkeit und den der Beschleunigung folgendes geschrieben werden:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},$$

wobei s die Weglänge der Bewegung ist.

Eine **gleichförmig geradlinige Bewegung** ist durch eine konstante Geschwindigkeit gekennzeichnet. Daher gilt

$$v = \mathrm{const}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0, \quad s = \int v\,\mathrm{d}t = vt + s_0,$$

wobei s_0 die Länge des zur Zeit $t = 0$ bereits durchlaufenen Weges darstellt. Allgemein wählen wir den Anfangspunkt für die Bahnmessung an der Stelle, an der sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ befand. Dann gilt $s_0 = 0$.

Eine **gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung** ist durch eine konstante Beschleunigung gekennzeichnet. Daher ist

$$a = \text{const}, \quad v = \int a \, dt = at + v_0,$$

$$s = \int v \, dt = \int (at + v_0) \, dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0,$$

wobei s_0 die gleiche Bedeutung annimmt wie oben und v_0 die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit darstellt, d. h. den Geschwindigkeitswert des Punktes zur Zeit $t = 0$. Wenn $a = \text{const}$, jedoch $a < 0$ ist, dann handelt es sich um eine **gleichförmig verzögerte geradlinige Bewegung.**

Spezielle Fälle einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung sind der **freie Fall**, der **senkrechte Wurf nach oben** und der **senkrechte Wurf nach unten:**

Freier Fall

$$a = g, \quad v_0 = 0, \quad v = gt, \quad s = \frac{1}{2} gt^2$$

Senkrechter Wurf nach oben

$$a = -g, \quad v_0 \neq 0, \quad v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Senkrechter Wurf nach unten

$$a = g, \quad v_0 \neq 0, \quad v = v_0 + gt, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

Bei einer allgemeinen geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung nicht konstant, sondern eine Zeitfunktion. Es gilt also

$$a = a(t), \quad v = \int a(t) \, dt, \quad s = \int \left(\int a(t) \, dt \right) dt.$$

Die Bewegung eines Massenpunktes, die wir als **schiefen Wurf** bezeichnen, ist gleichfalls durch eine konstante Beschleunigung $a = g$ gekennzeichnet, jedoch fallen die Beschleunigung g und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Unterschied von einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung nicht in die gleiche Gerade. Wenn der schiefe Wurf sich in einer x,y-Ebene vollzieht, und zwar so, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der x-Achse den Winkel φ bildet (Bild 1), dann

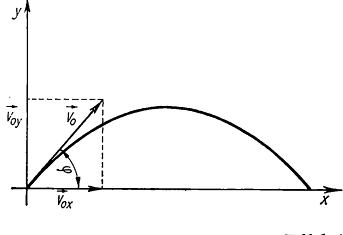


Bild 1

gelten die Beziehungen

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} = v_0 \cos\varphi, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\varphi;$$

$$x = v_0 \cos\varphi, \qquad y = v_{0t} \sin\varphi - \frac{1}{2} gt^2.$$

Bei einer krummlinigen Bewegung ist es üblich, die Beschleunigung des Punktes in eine *Tangentialkomponente* (Berührungskomponente) und in eine *Normalkomponente* (Zentripetalkomponente) zu zerlegen. Dabei gilt

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{r}\vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\tau}$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente ist und $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor, der in Richtung der Normalen zur Bewegungsbahn am gegebenen Ort fällt und vom Krümmungsmittelpunkt zum gegebenen *Ort* gerichtet ist; r ist der Krümmungsradius der Bahn im gegebenen Punkt. Für die einzelnen Beschleunigungskomponenten und die Gesamtbeschleunigung gilt also

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{r}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Winkelgeschwindigkeit und **Winkelbeschleunigung** eines in Bewegung begriffenen Punktes werden durch folgende Beziehungen definiert:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2},$$

wobei $\vec{\varphi}$ der Vektor ist, dessen Wert durch die Größe des vom zugehörigen Ortsvektor eines in Bewegung begriffenen Punktes beschriebenen Winkels gegeben ist. Der Vektor steht senkrecht auf der Winkelebene. Als positiv gilt die Richtung, von der aus die positive Drehung des Winkels gegen den Uhrzeigersinn gesehen wird. Wenn es sich um eine krummlinige Bewegung handelt, kann man schreiben

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

In einem solchen Beispiel fallen die Vektoren $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ in eine gleiche Gerade, die senkrecht auf der Bewegungsebene steht.
Die Winkelgeschwindigkeit hängt mit der Umfangsgeschwindigkeit eines in Bewegung begriffenen Punktes gemäß folgender Beziehung zusammen:

$$v = r\omega$$

(r Krümmungsradius). Aus der angeführten Beziehung für eine ebene krummlinige Bewegung folgt weiter:

$$a_t = r\alpha.$$

Für den Wert der Umfangsgeschwindigkeit kann auch bei einer krummlinigen Bewegung die Beziehung $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ geschrieben werden, wobei s die Bahnlänge bedeutet.

Ein Spezialfall der krummlinigen Bewegung ist die *Bewegung auf einer Kreisbahn.* Die gleichförmige, eine Kreisbahn beschreibende Bewegung ist durch konstante Winkelgeschwindigkeit gekennzeichnet. Für sie gilt

$$\omega = \text{const}, \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t = \omega t + \varphi_0,$$

wobei φ_0 der Winkel ist, den der Ortsvektor des sich bewegenden Punktes – bezogen auf den Kreismittelpunkt – zur Zeit $t = 0$ mit einer bestimmten, als Basis gewählten Richtung des Ortsvektors bildet. Allgemein wird $\varphi_0 = 0$ gewählt.

Als **Periodendauer** T einer gleichförmigen Bewegung auf einer Kreisbahn bezeichnen wir die Zeitspanne, in der ein Punkt die Kreisbahn einmal durchläuft. Es gilt für diese

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Die **Frequenz** f einer Bewegung stellt die Anzahl der Umläufe in der Zeiteinheit dar:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Die **gleichförmig beschleunigte Bewegung** auf einer **Kreisbahn** ist durch eine konstante Winkelbeschleunigung gekennzeichnet. Daher findet man

$$\alpha = \text{const}, \quad \omega = \int \alpha \,\mathrm{d}t = \alpha t + \omega_0,$$

$$\varphi = \int \omega \,\mathrm{d}t = \int (\alpha t + \omega_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0,$$

wobei φ_0 eine analoge Bedeutung wie oben annimmt und ω_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Im Falle, daß $\alpha = \text{const}$, jedoch < 0 ist, handelt es sich um eine gleichförmig verzögerte Bewegung, die eine Kreisbahn beschreibt.

Wir setzen die Bewegung eines Punktes in Relation zu zwei Bezugssystemen S und S', wobei das System S' hinsichtlich des Systems S eine fortschreitende Bewegung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}^*$ und der Beschleunigung $\vec{a}^*$ sowie eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung α vollführt. Danach ist die

Beziehung zwischen der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw. der Beschleunigung $\vec{a}$ des Punktes in bezug auf das System S und der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ bzw. der Beschleunigung $\vec{a}'$ des Punktes hinsichtlich des Systems S' wie folgt gegeben:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \omega \times \vec{r}' + \vec{v}',$$

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2(\omega \times \vec{v}') + \alpha \times \vec{r}' + \vec{a}',$$

wobei $\vec{r}'$ der Ortsvektor des in Bewegung begriffenen Punktes in Hinsicht auf einen Bezugspunkt des Systems S' ist. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw. die Beschleunigung $\vec{a}$ bezeichnen wir als ***absolut***, während die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ bzw. die Beschleunigung $\vec{a}$, als ***relativ*** bezeichnet werden.

Unter der **Flächengeschwindigkeit** einer Bewegung verstehen wir den Vektor

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v},$$

dessen absoluter Betrag zahlenmäßig der Fläche gleichkommt, die vom Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes in der Zeiteinheit gebildet wird. Wenn $\vec{r} \perp \vec{v}$ und der Anfangspunkt des Vektors $\vec{r}$ im Krümmungsmittelpunkt an einer gegebenen Stelle liegt, dann gilt

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

B Beispiele[1])

1. Eine Strecke AB konstanter Länge wird so bewegt, daß ihre beiden Endpunkte A bzw. B entlang der y-Achse bzw. x-Achse eines bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystems gleiten (Bild 2). Es ist festzustellen, welche Bahn bei dieser Bewegung der beliebig gewählte, auf der Strecke AB liegende Punkt M beschreibt.

Lösung

Bei der gemäß Bild 2 vorgesehenen Bezeichnung kann man schreiben

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

oder

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi.$$

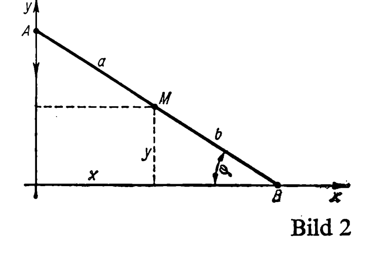


Bild 2

[1]) Die numerischen Rechnungen wurden, soweit erforderlich, mittels Logarithmentafel ausgeführt

Durch Potenzieren beider Gleichungen und durch Addieren erhalten wir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Der Punkt M bewegt sich längs einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

2. Die Bewegung eines Punktes sei durch die Gleichungen

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}), \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt})$$

bestimmt, wobei a und k Konstanten darstellen. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu ermitteln und der Geschwindigkeits- sowie Beschleunigungswert des Punktes als Funktion des absoluten Wertes vom Ortsvektor des Punktes auszudrücken.

Lösung

Die Gleichungen, die die Bewegung des Punktes bestimmen, können in folgender Form geschrieben werden:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}) = 2a \cosh kt,$$

$$y = a(e^{kt} - e^{-kt}) = 2a \sinh kt.$$

Durch Potenzieren beider Gleichungen und durch Subtraktion erhalten wir

$$x^2 - y^2 = 4a^2, \tag{1}$$

da $\cosh^2 kt - \sinh^2 kt = 1$. Aus Gl. (1) ergibt sich, daß die Bahn des Punktes eine Hyperbel darstellt. Für den Geschwindigkeits- und Beschleunigungswert gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2k^2(e^{kt} - e^{-kt})^2 + a^2k^2(e^{kt} + e^{-kt})^2} =$$

$$= k\sqrt{x^2 + y^2} = kr,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = k^2r.$$

3. Die Bewegung eines Punktes ist in Polarkoordinaten durch die Gleichungen $r = Ae^{kt}$ und $\varphi = kt$ gegeben, wobei A und k Konstanten sind. Es ist die Gleichung der Bewegungsbahn zu finden; Geschwindigkeit, Beschleunigung und Krümmungsradius der Bahn sind als Funktion der Polarkoordinate r auszudrücken.

Lösung

In Polarkoordinaten lautet die Bahngleichung $r = Ae^{\varphi}$, was die Gleichung der logarithmischen Spirale darstellt. Für die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

Wenn $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ ist, wobei r und φ gemäß der angegebenen Beziehung zeitabhängig sind, dann gilt

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2r \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \cos \varphi + 2r \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \cos \varphi} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{A^2k^2e^{2kt} + r^2k^2} = \underline{kr\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 + 4\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^4 + r^2\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 4r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}} =$$

$$= \sqrt{A^2k^4e^{2kt} + 4A^2k^4e^{2kt} + r^2k^4 - 2rAk^4e^{kt}} = \sqrt{4k^4r^2} = \underline{2k^2r.}$$

Der Krümmungsradius R kann aus der Beziehung $v = R\dfrac{d\varphi}{dt}$ bestimmt werden, so daß sich ergibt

$$R = kr\frac{\sqrt{2}}{k} = \underline{r\sqrt{2}}.$$

4. Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 km h^{-1}. Durch Einsatz der Bremsen kann der Zug innerhalb 2 min zum Halten gebracht werden. Unter der Voraussetzung, daß die Bewegung des Zuges während der Bremsung gleichförmig verzögert ist, ist die Entfernung desjenigen Ortes von der angesteuerten Bahnstation zu errechnen, an dem die Bremsen betätigt werden müssen.

Lösung

Für Geschwindigkeit und Weg einer gleichförmig beschleunigten Bewegung gelten die Beziehungen

$$v = v_0 + at, \quad s = v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

Nach Ablauf der Zeit $t = 2$ min soll die Geschwindigkeit $v = 0$ sein, damit wird

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{72\ \text{km h}^{-1}}{2\ \text{min}} = -\frac{1}{6}\ \text{m s}^{-2}.$$

Während des Bremsvorgangs legt der Zug bis zum Halten den Weg zurück

$$s = 72\ \text{km h}^{-1} \cdot 2\ \text{min} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\ \text{m s}^{-2} \cdot 2^2\ \text{min}^2 = 1200\ \text{m} = \underline{1{,}2\ \text{km}.}$$

Demnach müssen die Bremsen bereits in einer Entfernung von 1,2 km vor der Station in Betrieb gesetzt werden.

5. Eine Straßenbahn setzt sich mit der Beschleunigung $a = 0,3 \text{ m s}^{-2}$ in Bewegung. Welche Zeit benötigt sie für das Passieren des ersten Meters ihrer Bahn? In welcher Zeit durchfährt sie den zehnten Meter, und wie groß ist ihre Fahrgeschwindigkeit am Ende des zehnten Bahnmeters?

Lösung

Für die Geschwindigkeit und die Strecke, die von der Straßenbahn durchfahren wird, gelten die Beziehungen

$$v = at; \quad s = \frac{1}{2}at^2.$$

Für die Zeit, welche die Straßenbahn für ihren ersten Meter benötigt, gilt

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2\text{m}}{0,3 \text{ m s}^{-2}}} = \underline{2,58 \text{ s}}.$$

Die Zeit t^*, während der sie den zehnten Meter ihrer Bahn durchfährt, ermitteln wir aus den Beziehungen

$$s_9 = \frac{1}{2}at_9^2 \quad s_{10} = \frac{1}{2}at_{10}^2$$

$$t^* = t_{10} - t_9 = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} - \sqrt{\frac{2s_9}{a}} = \sqrt{\frac{20 \text{ m}}{0,3 \text{ m s}^{-2}}} - \sqrt{\frac{18 \text{ m}}{0,3 \text{ m s}^{-2}}} =$$
$$= (8,15 - 7,75) \text{ s} = \underline{0,4 \text{ s}}.$$

Am Ende des zehnten Meters hat die Straßenbahn die Geschwindigkeit

$$v_{10} = at_{10} = 0,3 \text{ m s}^{-2} \cdot 8,15 \text{ s} = \underline{2,45 \text{ m s}^{-1}}.$$

6. Ein Körper werde vom Erdboden aus mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4,9 \text{ m s}^{-1}$ senkrecht aufwärts geworfen. Gleichzeitig beginnt aus der Höhe, die dieser Körper maximal erreicht, ein anderer mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten zu fallen. Es ist die Zeit t^* zu bestimmen, zu der beide Körper einander begegnen, desgleichen die Entfernung h von der Erdoberfläche sowie die Geschwindigkeiten v_1^* und v_2^* beider Körper im Moment ihres Zusammentreffens. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

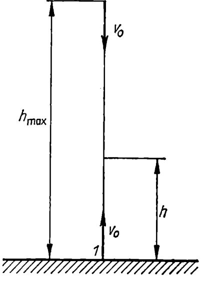


Bild 3

Lösung

Für den Körper 1 (Bild 3), der aufwärts geworfen wurde, gelten die Beziehungen

$$s_1 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2; \quad v_1 = v_0 - gt.$$

Seine maximale Höhe erreicht er in der Zeit t_m. Hier ist seine Geschwindigkeit $v_1 = 0$, d h., $t_m = v_0/g$. Seine Maximalhöhe

beträgt

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Für den senkrecht abwärts fallenden Körper 2 gelten die Beziehungen

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2; \quad v_2 = v_0 + g t.$$

Für den Moment des Zusammentreffens finden wir

$$s_1 + s_2 = h_{\max}, \text{ d. h., } v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} + v_0 t^* + \frac{1}{2} g t^{*2} = \frac{v_0^2}{2g},$$

so daß wir für die Zeit t^* bis zum Treffen beider Körper den Wert

$$t^* = \frac{v_0}{4g} = \frac{4{,}9 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{0{,}125 \text{ s}}$$

erhalten. Für die Höhe h des Zusammentreffens sowie für die hier geltenden Geschwindigkeiten v_1^* und v_2^* erhalten wir durch Einsetzen des Wertes von t^* in die entsprechenden Beziehungen

$$h = \frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{16 g^2} = \frac{7 v_0^2}{32 g} = \frac{7 \cdot 4{,}9^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{32 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2}} = \underline{0{,}53 \text{ m}};$$

$$v_1^* = v_0 - \frac{v_0}{4} = \frac{3 v_0}{4} = 3{,}67 \text{ m s}^{-1}; \quad v_2^* = v_0 + \frac{v_0}{4} = \frac{5 v_0}{4} = \underline{6{,}12 \text{ m s}^{-1}}.$$

7. Ein Körper bewegt sich im luftleeren Raum frei fallend aus der Höhe $h = 245$ m. Teilen Sie diese Fallstrecke in $n = 5$ Teilstrecken, und zwar so, daß die Fallzeit des Körpers für jede dieser Teilstrecken gleich groß ist.

Lösung

Wir halten folgendes fest: $h = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Wenn wir die Fallzeit, die für alle Teilabschnitte gleich groß ist, mit dem Zeichen t_0 angeben, so finden wir

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2; \quad x_1 + x_2 = \frac{1}{2} g (2 t_0)^2; \ \ldots;$$

$$h = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2} g (n t_0)^2.$$

Für t_0 gilt dann

$$t_0^2 = \frac{2h}{g} \frac{1}{n^2},$$

so daß sich ergibt:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{h}{n^2}; \quad x_2 = \frac{1}{2} g (2 t_0)^2 - x_1 = h \left(\frac{2}{n}\right)^2 - h \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{3h}{n^2};$$

$$\ldots; \ x_n = \frac{2n-1}{n^2} h.$$

Für $h = 245$ m und $n = 5$ erhalten wir also

$$x_1 = \frac{245\,\text{m}}{25} = \underline{9{,}8\,\text{m}}; \quad x_2 = \frac{3 \cdot 245\,\text{m}}{25} = \underline{29{,}4\,\text{m}};$$

$$x_3 = \underline{49{,}0\,\text{m}}; \quad x_4 = \underline{68{,}6\,\text{m}}; \quad x_5 = \underline{88{,}2\,\text{m}.}$$

8. Ein Massenpunkt führt eine geradlinige Bewegung so aus, daß seine Beschleunigung mit der Zeit gleichförmig anwächst und während der ersten 10 Sekunden der Bewegung vom Nullwert auf den Wert $5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ steigt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes nach Ablauf von 10 s, und welche Strecke legt er in dieser Zeit zurück, wenn er sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befand?

Lösung

Für die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Zeit kann geschrieben werden:

$$a = kt, \quad k = \frac{a_{10}}{t_{10}} = \frac{5\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}{10\,\text{s}} = 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3}.$$

Demnach erhalten wir für Geschwindigkeit und Weglänge:

$$v = \int a(t)\,\text{d}t = \int kt\,\text{d}t = \frac{1}{2}\,kt^2;$$

$$v_{10} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3} \cdot 10^2\,\text{s}^2 = \underline{25\,\text{m}\,\text{s}^{-1}};$$

$$s = \int v\,\text{d}t = \int \frac{1}{2}\,kt^2\,\text{d}t = \frac{1}{6}\,kt^3;$$

$$s_{10} = \frac{1}{6} \cdot 0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-3} \cdot 10^3\,\text{s}^3 = \underline{83{,}33\,\text{m}}.$$

9. Eine Granate verlasse das Kanonenrohr mit der Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 1000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ unter einem Abschußwinkel von $\varphi_0 = 55°$. Unter Vernachlässigung von Luftwiderstand und Erdkrümmung ist die theoretische Schußweite und die maximale Schußhöhe zu bestimmen.

Lösung

Für die Koordinaten eines bestimmten Punktes der Geschoßbahn gelten wie beim schiefen Wurf die Beziehungen

$$x = v_0 \cos \varphi_0; \quad y = v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2}\,gt^2.$$

Im Punkt B (Bild 4) ist die y-Komponente der Geschwindigkeit gleich Null, so daß geschrieben werden kann

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \varphi_0 - gt = 0.$$

Für die Zeit t, in der die Granate den Punkt B erreicht, gilt

$$t = \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g},$$

so daß sich ergibt:

$$y_{max} = v_0 \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g} \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{2g} = \underline{34{,}1 \text{ km}}.$$

Dieser Wert stellt die von der Granate theoretisch erreichbare Maximalhöhe dar.
Im Punkt C ist $y = 0$. Diesen Punkt erreicht die Granate nach einer Zeit, für welche gilt:

$$v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} gt^2 = 0; \quad t = \frac{2v_0 \sin \varphi_0}{g}. \tag{1}$$

Die zweite Wurzel von Gl. (1) $t = 0$ gilt für den Abschußort, an dem ja gleichfalls $y = 0$ ist. Für die Schußweite d erhalten wir dann

$$d = v_0 \frac{2v_0 \sin \varphi_0}{g} \cos \varphi_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi_0}{g} = \underline{95{,}7 \text{ km}}.$$

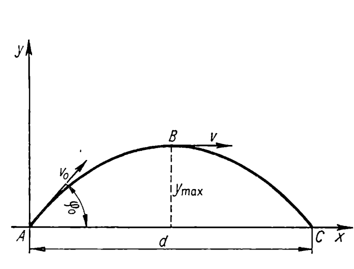


Bild 4

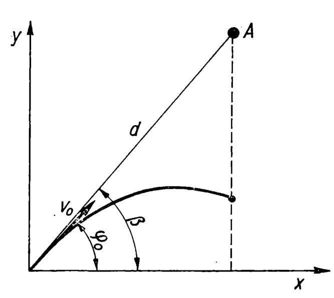


Bild 5

10. Artilleristen erkennen ein Objekt A in gerader Luftlinienentfernung $d = 5000$ m unter einem Horizontwinkel $\beta = 60°$. Wie groß muß der Abschußwinkel φ_0 bei einer Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 300 \text{ m s}^{-1}$ sein, damit das Objekt getroffen wird, wenn dieses gleichzeitig mit dem Abschuß frei zu fallen beginnt? Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.

Lösung

Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn wir daran denken, daß im Moment des Zusammentreffens die Koordinaten von Schuß und Objekt zusammenfallen müssen (Bild 5). Für die Schußkoordinaten gelten die Beziehungen

$$x = v_0 t \cos \varphi_0, \quad y = v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} gt^2.$$

Die Objektkoordinaten wiederum erfüllen die Beziehungen

$$x' = d\cos\beta, \quad y' = d\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Im Moment des Zusammentreffens muß demnach gelten

$$v_0 t\cos\varphi_0 = d\cos\beta;$$

$$v_0 t\sin\varphi_0 - \frac{1}{2}gt^2 = d\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Nach Dividieren der zweiten Gleichung durch die erste erhalten wir

$$\tan\varphi_0 = \tan\beta, \quad \text{also} \quad \varphi_0 = \beta = 60°.$$

Der Abschußwinkel muß also ebenfalls 60° betragen.

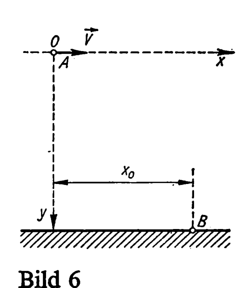


Bild 6

11. Ein Flugzeug A fliegt in einer Höhe $h = 4000$ m mit einer Horizontalgeschwindigkeit $v = 500$ km h^{-1}. In welcher waagerecht gemessenen Entfernung x_0 (Bild 6) vom Punkt B muß ein beliebiger Körper aus dem Flugzeug abgeworfen werden, damit er im freien Fall in B auftrifft? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Lösung

Der aus dem Flugzeug abgeworfene frei fallende Körper vollführt, bezogen auf die Erdoberfläche, eine Bewegung von der Art des horizontalen Wurfes mit einer Anfangsgeschwindigkeit, die der Flugzeuggeschwindigkeit im Moment des Abwurfs entspricht. Für die Lage des Körpers in jedem beliebigen Moment gilt dann

$$x = vt; \quad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Die Bedingung dafür, daß der Körper im Punkt B auftrifft, kann durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$x_0 = vt_0; \quad h = \frac{1}{2}gt^2,$$

für die gesuchte Größe x_0 erhalten wir daraus

$$x_0 = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{5\cdot 10^5\ \text{m}}{3{,}6\cdot 10^3\ \text{s}}\sqrt{\frac{8000\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m s}^{-2}}} = \underline{3967\ \text{m}}.$$

12. Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Abschußwinkel φ hochgeworfener Massenpunkt vollführt im luftleeren Raum eine Bewegung in Form einer Parabel (Bild 7), deren Parameterdarstellung durch folgende Gleichungen gegeben ist:

$$x = v_0 t\cos\varphi; \quad y = v_0 t\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2.$$

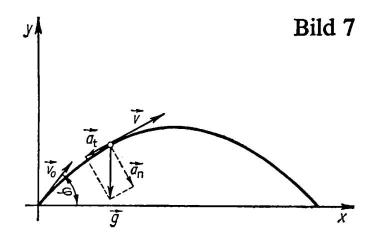


Bild 7

Es sind die Größen Geschwindigkeit, Tangential- und Normalbeschleunigung zu ermitteln, durch welche die Bewegung des Massenpunkts an einem beliebigen Ort seiner Bahn ausgezeichnet ist.

Lösung

Für die Darstellung der Koordinaten und der Geschwindigkeit gelten die Beziehungen

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\varphi; \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\varphi - gt;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} gt^2\right)} = \underline{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

Die Geschwindigkeit bildet mit den Koordinatenachsen Winkel, für die gilt:

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \frac{v_0 \cos\varphi}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}};$$

$$\cos(v, y) = \frac{v_y}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \frac{v_0 \sin\varphi - gt}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}.$$

Für die Tangential- und Normalbeschleunigung erhalten wir:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = -\underline{\frac{g(v_0 \sin\varphi - gt)}{v}};$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = g^2 - \frac{g^2(v_0 \sin\varphi - gt)^2}{v^2} = g^2\left(1 - \frac{v_y^2}{v^2}\right) = \frac{g^2}{v^2}(v^2 - v_y^2) =$$

$$= \frac{g^2}{v^2} v_x^2 = \frac{g^2 v_0^2 \cos^2\varphi}{v^2}; \quad \underline{a_n = \frac{g v_0 \cos\varphi}{v}}.$$

13. Ein Körper beginnt sich um eine feste Achse mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 0{,}04\,\mathrm{s}^{-2}$ zu drehen. Nach welcher Zeit, vom Beginn der Drehbewegung an gerechnet, bildet die Gesamtbeschleunigung eines beliebigen Punktes des Körpers mit der Tangentialgeschwindigkeit desselben Punktes einen Winkel von $\varphi = 76°$?

Lösung

Für den Winkel, den die Gesamtbeschleunigung eines bestimmten Punktes des rotierenden Körpers mit der Geschwindigkeitsrichtung bildet (Bild 8), gilt

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_t} = \frac{r\omega^2}{r\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 t^2}{\alpha} = \alpha t^2,$$

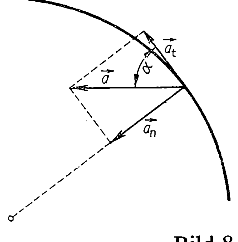


Bild 8

so daß sich für die Zeit t^*, in der die angegebene Bedingung erfüllt wird, ergibt:

$$t^* = \sqrt{\frac{\tan\varphi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\tan 76°}{0{,}04\,\mathrm{s}^{-2}}} = \sqrt{\frac{4{,}01}{0{,}04\,\mathrm{s}^{-2}}} = \underline{10\,\mathrm{s}}.$$

14. Um den Mantel einer Rolle mit dem Radius r, die sich um eine horizontale Achse drehen kann, ist ein Seil gelegt, an welchem ein Körper hängt (Bild 9). Die Bewegung des Körpers wird durch die Gleichung $s = {}^1/_2\, at^2$ definiert. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung des Punktes M, der auf dem Rollenumfang liegt.

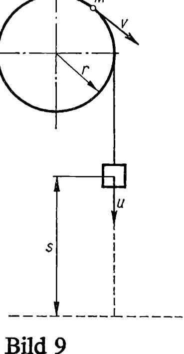


Bild 9

Lösung

Die Geschwindigkeit des Körpers ist durch die Beziehung

$$u = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$$

gegeben. Die Geschwindigkeit v des Punktes M hat ebenfalls den Wert $v = at$. Für die Tangential- bzw. Normalbeschleunigung des Punktes M gilt somit

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{r}.$$

Der Wert der Gesamtbeschleunigung des Punktes M ändert sich dann mit der Zeit entsprechend der Beziehung

$$a^* = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^4t^4}{r^2}} = \underline{\frac{a}{r}\sqrt{r^2 + a^2t^4}}.$$

15. Ein Zug bewegt sich gleichförmig verzögert auf einer Bahn der Länge $s = 800$ m, die in Form eines Kreises mit dem Radius $r = 800$ m gekrümmt ist. Es sind zu bestimmen: der Wert der Gesamtbeschleunigung eines beliebigen Punktes des Zuges am Anfangs- und Endpunkt des gekrümmten Streckenabschnitts sowie die Zeit, die der Zug zum Durchfahren dieser Strecke benötigt. Die Zuggeschwindigkeit am Beginn der Kurvenstrecke sei $v_0 = 54\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ und am Ende $v = 18\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Lösung

Für die Bewegung eines beliebigen Punktes des Zuges gelten die Beziehungen

$$v = v_0 + a_t t; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}\, a_t t^2.$$

Wenn wir in diese Gleichungen für v, v_0 und s die in der Aufgabe gegebenen Werte einsetzen, können wir daraus die Zeit t^*, in der der Zug den Streckenabschnitt durchfährt, sowie die Tangentialbeschleunigung a_t errechnen. Man findet nämlich

$$\frac{v - v_0}{t^*} = a_t; \quad s = v_0 t^* + \frac{1}{2}\,\frac{v - v_0}{t^*}\, t^{*2} = \frac{1}{2}\,(v_0 + v)\, t^*,$$

so daß sich ergibt:

$$t^* = \frac{2\,\text{s}}{v_0 + v} = \frac{1600\,\text{m}}{\frac{72 \cdot 10^3}{3{,}6 \cdot 10^3}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}} = 80\,\text{s}; \quad a_t = \frac{v - v_0}{t^*} = -0{,}125\,\text{m}\,\text{s}^{-2}.$$

Für den Wert der Gesamtbeschleunigung gilt die Gleichung $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, wobei man die Normalbeschleunigung am Anfangs- und Endpunkt der Kurvenstrecke aus den Beziehungen

$$a_{n0} = \frac{v^2}{r} \quad \text{bzw.} \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

bestimmen kann. Nach Einsetzen der hieraus berechneten Werte in den Ausdruck für die Gesamtbeschleunigung erhalten wir diese am Anfang und am Ende der Kurvenstrecke zu

$$\underline{a_0 = 0{,}308\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}; \quad \underline{a = 0{,}129\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}.$$

16. Ein Rad dreht sich mit der Tourenzahl $n = 1500\,\text{U}\,\text{min}^{-1}$. Durch Einsatz einer Bremse kann man erreichen, daß seine Drehbewegung in eine gleichförmig verzögerte übergeht und das Rad nach einer Bremszeit von $t_0 = 30\,\text{s}$ stehenbleibt. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung α und die Zahl der Umdrehungen, die das Rad vom Beginn des Bremsvorgangs bis zu seinem Stillstand ausführt.

Lösung

Für den Momentanwert der Winkelgeschwindigkeit gilt die Beziehung

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

wobei $\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \frac{1500}{60\,\text{s}} = 50\,\pi\,\text{s}^{-1}$. In der Zeit $t = t_0$ ist offensichtlich $\omega = 0$, so daß sich ergibt

$$\omega_0 + \alpha t = 0$$

und somit gefunden wird

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{50}{30}\,\pi\,\text{s}^{-2} = \underline{-5{,}24\,\text{s}^{-2}}.$$

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes des Rades beschreibt, bezogen auf den Mittelpunkt, in der Zeit t_0 den Winkel

$$\varphi_0 = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\alpha t_0^2 = 1500\,\pi - \frac{5}{6}\,\pi\,900 = 750\,\pi.$$

Für die Anzahl der in der Zeit t_0 ausgeführten Umdrehungen finden wir

$$N = \frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = \underline{375}.$$

17. Untersuchen Sie die Bewegung eines Massenpunktes, dessen Ortsvektor entsprechend der Beziehung $\vec{r} = \vec{\imath}A\cos bt + \vec{\jmath}A\sin bt$ von der Zeit abhängt, wobei $A = 6$ m und $b = \frac{\pi}{4}\,\text{s}^{-1}$ ist.

Lösung

Für die Geschwindigkeit gilt die Beziehung

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{3\pi}{2}\left(-\vec{\imath}\sin\frac{\pi}{4}t + \vec{\jmath}\cos\frac{\pi}{4}t\right)\text{m s}^{-1},$$

womit sich für den absoluten Geschwindigkeitsbetrag ergibt

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\frac{9\pi^2}{4}}\,\text{m s}^{-1} = \frac{3\pi}{2}\,\text{m s}^{-1}.$$

Also ist der Geschwindigkeitsbetrag konstant.
Die Richtung der Geschwindigkeit kann man für jeden Moment durch den Einheitsvektor in Geschwindigkeitsrichtung bestimmen, und zwar

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} = -\vec{\imath}\sin\frac{\pi}{4}t + \vec{\jmath}\cos\frac{\pi}{4}t.$$

Für die Beschleunigung erhalten wir analog

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{3\pi^2}{8}\left(-\vec{\imath}\cos\frac{\pi}{4}t - \vec{\jmath}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\text{m s}^{-2}.$$

Der Betrag der Gesamtbeschleunigung ist also

$$|\vec{a}| = a = \frac{3\pi^2}{8}\,\text{m s}^{-2}$$

ebenfalls konstant. Für die Tangential- und Normalbeschleunigung resultiert weiter

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{3\pi^2}{8}\,\text{m s}^{-2}.$$

Der Krümmungsradius $R = v^2/a_n = 6$ m ist also konstant. Da die Komponente des Ortsvektors zur Z-Achse gleich Null ist, handelt es sich um eine Bewegung in der X, Y-Ebene mit dem konstanten Krümmungsradius $R = 6$ m. Es ist eine Bewegung auf einer Kreisbahn. Den vom Ortsvektor $\vec{r}$ und vom Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ gebildeten Winkel kann man aus den folgenden Relationen bestimmen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{r}\vec{v}}{rv} = \frac{A(\vec{\imath}\cos bt + \vec{\jmath}\sin bt)\ Ab(-\vec{\imath}\sin bt + \vec{\jmath}\cos bt)}{A\,Ab} =$$

$$= -\cos bt\sin bt + \cos bt\sin bt = 0.$$

Es ist also $\varphi = 90°$, d. h., der Geschwindigkeitsvektor ist ständig senkrecht zum Ortsvektor gerichtet. Da $v = \omega R$ ist, erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{6}\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Für die Umlaufzeit T gilt dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 8\,\mathrm{s}.$$

Der Vektor $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ist senkrecht zur Kreisebene gerichtet, auf der die angegebene Bewegung des Massenpunktes erfolgt. Es gilt also für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = (\pi/4)\vec{k}\,\mathrm{s}^{-1}$. Für die Geschwindigkeit gilt auch die Beziehung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\pi}{4}\vec{k} \times \left(6\vec{i}\cos\frac{\pi}{4}t + 6\vec{j}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s}^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} \\ 6\cos\frac{\pi}{4}t; & 6\sin\frac{\pi}{4}t; & 0 \end{vmatrix}\mathrm{m\,s}^{-1} = \underline{\left(\vec{j}\,\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \vec{i}\,\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\mathrm{m\,s}^{-1}.}$$

Wir erhalten offenbar den gleichen Ausdruck wie oben.

18. Bestimmen Sie die Periodendauer für die Bewegung eines Körpers, der in zwei schiefen Ebenen ab- und aufwärts gleitet, die mit der Horizontalen den Winkel α bzw. β (Bild 10) bilden, wenn dieser in der Zeit $t = 0$ aus der Stellung A freigelassen wird. Reibungsverluste sowie Verluste an kinetischer Energie beim Aufprall von einer Ebene auf die andere bleiben unberücksichtigt.

Lösung

Wir setzen voraus, daß sich der Körper anfangs im Punkt A in der Höhe h über der horizontalen Ebene befindet. Zum Punkt B gelangt der Körper mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

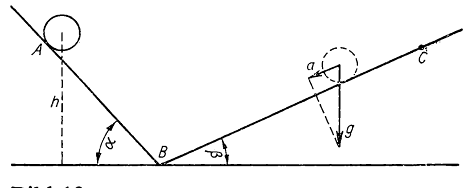


Bild 10

und bewegt sich längs der Bahn BC mit einer Geschwindigkeit weiter, die sich gemäß folgender Beziehung mit der Zeit verändert:

$$v = v_0 - at = v_0 - gt\sin\beta.$$

Die maximale Höhe im Punkt C erreicht der Körper zur Zeit t_1, für welche gilt

$$t_1 = \frac{v_0}{g \sin \beta}\,.$$

Die Zeit, in der der Körper vom Punkt C nach B zurückkehrt, ist ebenfalls t_1, so daß sich für die Gesamtzeit, in der er sich auf dem Abschnitt BC aufwärts bewegt und wieder zurückkehrt, ergibt:

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g \sin \beta}\,.$$

Analog gilt für die Gesamtzeit der Bewegung des Körpers auf dem Abschnitt BA und zurück

$$T_2 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}\,,$$

so daß die Periodendauer des Körpers auf den angegebenen schiefen Ebenen wie folgt ermittelt wird:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right) = \underline{2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right)}.$$

19. Eine Kurbel $OA = r$ (Bild 11) dreht sich um die feste Achse O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Im Punkt A ist die Kurbel mit einer Pleuelstange der Länge l gelenkig verbunden, welche den Kreuzkopf B in Bewegung setzt, der sich zwischen zwei parallel zueinander verlaufenden Ebenen bewegt. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes B.

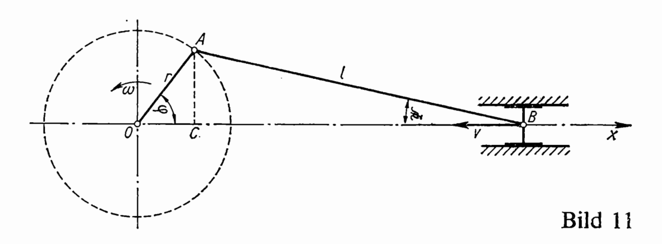


Bild 11

Lösung

Für die x-Koordinate des Punktes B gilt unter Berücksichtigung der Bezeichnungen des Bildes 11

$$x = \overline{OC} + \overline{CB} = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Durch die Anwendung des Sinussatzes kann der Zusammenhang zwischen den beiden Winkeln φ und ψ in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi. \tag{1}$$

Für den Geschwindigkeitsbetrag des Punktes B kann dann geschrieben werden

$$v = \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - l \sin \psi \frac{d\psi}{dt} . \tag{2}$$

Durch Differentiation von Gl. (1) nach der Zeit erhalten wir

$$\cos \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \cos \varphi \cdot \omega, \quad \text{d. h.,} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \omega,$$

wobei $d\varphi/dt = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel darstellt. Gl. (2) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$v = -r\omega \left(\sin \varphi + \sin \psi \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \right) = -r\omega \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} .$$

Diese Relation ermöglicht, die Geschwindigkeit des Punktes B für beliebige Werte des Winkels φ anzugeben. So ergibt sich z. B. für $\varphi = 0$ auch $\psi = 0$ und somit auch $v = 0$. Bei der Stellung $\varphi = 90°$ ist $\sin (\varphi + \psi) = \sin (90° + \psi) = \cos \psi$, so daß $v = -r\omega$ ist. Für die Beschleunigung des Punktes B gilt

$$a = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \left[\cos \varphi - \frac{r}{l} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^3 \psi} - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \psi} \right) \right],$$

wenn wir $\sin \psi$ nach Gl. (1) ausgedrückt haben. Für den Fall, daß $l \gg r$ ist, kann geschrieben werden $\cos \psi = 1$, und für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten wir die Beziehungen

$$\underline{v = -r\omega \left(\sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right),}$$

$$\underline{a = -r\omega^2 \left(\cos \varphi - \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right).}$$

20. Das Rad eines Eisenbahnwaggons rollt ohne Reibung auf einem geraden Gleis, und zwar so, daß die Geschwindigkeit seines Mittelpunktes v_0 ist. Es ist die Geschwindigkeit für die Punkte A und B in dem Moment zu bestimmen, der in Bild 12 festgehalten wurde.

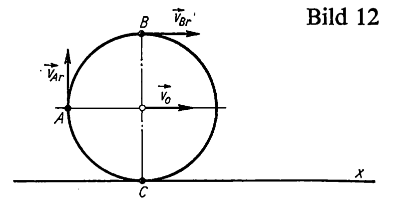


Bild 12

Lösung

Wir gehen von den Beziehungen aus, die den Zusammenhang zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit angeben, wenn das absolute Bezugssystem mit dem Gleis fest verbunden und das relative mit der Radachse verbunden ist. Für die zu bestimmende Absolutgeschwindigkeit der Punkte A und B ergibt sich dann

$$\vec{v}_A = \vec{v}^* + \vec{v}_A' = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Ar},$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}^* + \vec{v}_B' = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Br}.$$

Da sich das Rad bezüglich des relativen Bezugssystems gleichförmig dreht, weist die Relativgeschwindigkeit jedes beliebigen Punktes am Radumfang den gleichen Wert auf. Es ist also $\vec{v}_{Ar} = \vec{v}_{Br} = \vec{v}_{Cr}$. Für den Punkt C ist die Absolutgeschwindigkeit im gegebenen Augenblick gleich Null, d. h.,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}_{Cr} = 0,$$

woraus deutlich ersichtlich ist, daß $\vec{v}_{Cr} = \vec{v}_{Ar} = \vec{v}_{Br} = \vec{v}_0$ ist. Bezüglich der Geschwindigkeitsrichtung von $\vec{v}_{Ar}$ und $\vec{v}_{Br}$ kann man für den Wert der absoluten Geschwindigkeit der Punkte A und B wie folgt schreiben:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = \underline{v_0\sqrt{2}}\ ; \quad v_B = v_0 + v_0 = \underline{2v_0}.$$

Die Geschwindigkeitsrichtung von v_A ist durch die Beziehung

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{v_0} = 1$$

gegeben, d. h. $\varphi = 45°$, wobei φ der Winkel ist, den die Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ mit der x-Achse bildet. Die Geschwindigkeit $\vec{v}_B$ verläuft offensichtlich parallel zur x-Achse.

21. Eine waagerechte, kreisförmige Platte dreht sich so um eine senkrechte Mittelpunktsachse, daß sie in der Minute 120 Umdrehungen ausführt. Entlang ihrem Radius bewegt sich mit einer relativ zur Platte gleichförmigen Geschwindigkeit von $v' = 5\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$ ein Punkt. Es sind die Werte für Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes bezüglich seiner Umgebung zur Zeit $t = 20$ s zu ermitteln, wobei vorausgesetzt wird, daß er sich zur Zeit $t = 0$ im Mittelpunkt der Platte befand.

Lösung

Wir greifen wieder auf die Beziehungen zurück, die den Zusammenhang zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung zum Ausdruck bringen. Für die absolute Geschwindigkeit finden wir

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \omega \times \vec{r}' + \vec{v}'.$$

In unserem Falle ist $\vec{v}' = \mathrm{const}$ und $\vec{r}' = \vec{v}'t$, während $\vec{v}^* = 0$ ist. Es ergibt sich somit

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}' + \vec{v}' = \omega \times \vec{v}'t + \vec{v}'.$$

Da die Vektoren $\omega \times \vec{v}'t$ und $\vec{v}'$ senkrecht zueinander liegen, gilt

$$v = \sqrt{v'^2 + \omega^2 v'^2 t^2} = v'\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = \underline{12{,}57\ \mathrm{m\ s^{-1}}},$$

wenn wir ω aus der Beziehung $\omega = 2\pi n = 2\pi \dfrac{120}{60\,\mathrm{s}} = 4\pi\ \mathrm{s^{-1}}$ ermittelt haben.

Für die absolute Beschleunigung kann geschrieben werden

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2(\omega \times \vec{v}') + \alpha \times \vec{r}' + \vec{a}'.$$

In unserem Beispiel gilt: $\vec{a}' = 0$, $\vec{a}^* = 0$ und $\alpha = 0$, so daß resultiert

$$\vec{a} = \omega \times (\omega \times \vec{r}') + 2\,(\omega \times \vec{v}').$$

Da die Vektoren $\omega \times (\omega \times \vec{r}')$ und $\omega \times \vec{v}'$ senkrecht zueinander gerichtet sind, gilt

$$a = \sqrt{(\omega^2 v' t)^2 + 4\omega^2 v'^2} = \omega v' \sqrt{4 + \omega^2 t^2} = \underline{158 \text{ m s}^{-2}}.$$

22. Zwei Meteoriten M_1 und M_2 bewegen sich auf einer gemeinsamen Ellipse, in deren einem Brennpunkt S sich die Sonne befindet (Bild 13). Die Entfernung zwischen beiden Meteoriten ist so gering, daß der Ellipsenbogen M_1M_2 als Strecke betrachtet werden kann. Beim Durchgang durch das Perihel P haben beide Meteoriten voneinander den Abstand d. Wie groß ist ihr gegenseitiger Abstand beim Durchgang durch das Aphel A, wenn bekannt ist, daß sich die Meteoriten mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit bewegen und wenn wir die Entfernungen $SP = r_1$ und $SA = r_2$ kennen?

Lösung

Übereinstimmend mit der Aufgabenstellung gilt für die Flächengeschwindigkeit

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = k,$$

wobei k eine Konstante darstellt. In den Punkten P bzw. A kann der Wert der jeweiligen Flächengeschwindigkeit wie folgt ausgedrückt werden:

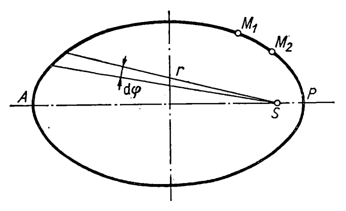


Bild 13

$$p_P = \frac{1}{2} r_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_P = k; \quad p_A = \frac{1}{2} r_2^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_A = k,$$

woraus resultiert

$$r_1^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_P = r_2^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_A.$$

Diese Gleichung aber gibt die Beziehung

$$r_1 (a_t)_P = r_2 (a_t)_A$$

an, wobei $(a_t)_2$ bzw. $(a_t)_A$ die Tangentialbeschleunigungen der Meteoriten im Punkt P bzw. A darstellen. Da die gegenseitige Entfernung beider Meteoriten sehr gering ist, kann man dafür in P bzw. A schreiben

$$d_P = \frac{1}{2} (a_t)_P \Delta t^2; \quad d_A = \frac{1}{2} (a_t)_A \Delta t^2,$$

so daß sich ergibt

$$\frac{d_A}{d_P} = \frac{(a_t)_A}{(a_t)_P} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{d. h.} \quad d_A = \frac{r_1}{r_2} d_P = \underline{\frac{r_1}{r_2} d},$$

da ja $d_P = d$ ist. Die Situation ist nämlich so, als ob beide Meteoriten unter gleichen Bedingungen, lediglich mit einem zeitlichen Abstand Δt, auf die gleiche elliptische Bahn gebracht worden wären.

A Aufgaben

1. Die Bewegung eines Punktes ist durch die Gleichungen $x = A_1t^2 + B_1$ und $y = A_2t^2 + B_2$ definiert, wobei $A_1 = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $B_1 = 0{,}05\ \mathrm{m}$, $A_2 = 0{,}15\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ und $B_2 = -0{,}03\ \mathrm{m}$ ist. Ermitteln Sie Größe und Richtung von Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit $t = 2$ s.
2. Ein Punkt bewegt sich geradlinig, und zwar so, daß die von ihm durchlaufene Bahn gemäß der Beziehung $x = At + Bt^2$ zeitabhängig ist. Dabei ist $A = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und $B = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
   Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeit v^* des Punktes in der Zeit zwischen dem Beginn der zehnten und dem Ende der zwölften Sekunde, und welche Momentangeschwindigkeiten ergeben sich zu den genannten Zeitpunkten?
3. Ein Punkt bewegt sich auf der x-Achse so, daß die Zeitabhängigkeit seiner Bahn durch die Gleichung $x = \frac{k}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ gegeben ist, wobei k und ω Konstanten sind. Ermitteln Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktionen von x.
4. Die Bewegung eines Punktes wird in Polarkoordinaten durch die Gleichungen $r = nt$ und $\varphi = bt$ dargestellt, wobei n und b Konstanten sind. Formulieren Sie die Gleichung der Bahnbewegung, und drücken Sie die Zeitabhängigkeit von Geschwindigkeit und Beschleunigung aus.
5. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit $t = 10$ s, der eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ausführt, wenn seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ Null war und wenn er nach $t_1 = 25$ s einen Weg von 110 m Länge durchlaufen hat?
6. Ein Auto fährt in einem bestimmten Punkt seiner Bahn mit der Geschwindigkeit $v_0 = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ und 100 m weiter mit der Geschwindigkeit $v = 40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Wie groß ist die Beschleunigung des Autos, wenn wir voraussetzen, daß seine Bewegung gleichförmig verzögert ist?
7. Zwei Körper bewegen sich mit den Beschleunigungen $a_1 = 6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ und $a_2 = 4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ sowie mit den Anfangsgeschwindigkeiten $v_{01} = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und $v_{02} = 15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aufeinander zu. Die Anfangsentfernung zwischen beiden beträgt $l = 750$ m. Welche Zeit vergeht, bis beide Körper aufeinandertreffen?
8. Zwei Körper, die anfangs 100 m Abstand haben, bewegen sich geradlinig aufeinander zu: der erste mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, der zweite gleichförmig beschleunigt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und der Beschleunigung $a = 4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Bestimmen Sie den Abstand des Treffpunktes vom Ausgangsort des ersten Körpers sowie die Zeit, nach welcher sie sich treffen.
9. Ein Geschoß verläßt seinen 10 m langen Lauf mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 500\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Wie groß ist die Beschleunigung im Lauf, und in welcher Zeit durchläuft ihn das Geschoß, wenn wir voraussetzen, daß die Bewegung innerhalb des Laufes gleichförmig beschleunigt wird?
10. Ein Beobachter, der im Moment des Anfahrens eines Zuges an dessen Spitze stand, bemerkt, daß der erste Waggon in der Zeit $t_1 = 4$ s unmittelbar an ihm vorbeifährt. Wie lange wird der n-te Waggon brauchen, um an ihm vorbeizufahren (z. B. $n = 7$), wenn alle Waggons gleich lang sind? Die Bewegung

des Zuges soll als geradlinig gleichförmig beschleunigt angesehen werden.

11. Mit welcher Geschwindigkeit bewegte sich ein Auto bis zu dem Moment, da der Fahrer zu bremsen begann, wenn es sich während des Bremsvorgangs bis zum Halt mit der konstanten Beschleunigung $a = -1{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ bewegte und dabei eine Strecke von 135 m zurücklegte?

12. Aus einer Höhe $h = 195$ m über dem Erdboden bewegt sich ein Körper im freien Fall. Im Moment, da dieser Körper zu fallen beginnt, werfen wir vom Boden aus einen anderen Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 65\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ senkrecht aufwärts. Wann und in welcher Höhe begegnen beide Körper einander?

13. Von einer bestimmten Höhe aus werfen wir mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleichzeitig zwei Körper: den ersten senkrecht aufwärts, den zweiten senkrecht nach unten. Welche Zeitabhängigkeit ergibt sich für die gegenseitige Entfernung d beider Körper?

14. Wir lassen eine Bleikugel in einen Schacht fallen. Ihr Aufschlag auf dem Boden des Schachts ist nach Ablauf von 10 s zu hören. Wie tief ist der Schacht, wenn wir mit einer Luftschallgeschwindigkeit $v = 340\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ rechnen?

15. Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_0, mit der eine Kugel senkrecht aufwärts abgefeuert wurde, und die Höhe h, die sie maximal erreichte, wenn sie nach insgesamt 20 s wieder auf den Boden zurückfällt.

16. Ein frei fallender Körper hat in einem bestimmten Punkt A seiner Bahn die Geschwindigkeit $v_A = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Ermitteln Sie die Zeit, in welcher der Körper eine Entfernung AB zurücklegt, wenn er in B eine Geschwindigkeit $v_B = 2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ hat. Wie groß ist die Entfernung AB?

17. Die Beschleunigung eines Massenpunktes verringert sich bei seiner geradlinigen Bewegung gleichförmig von einem Anfangswert $a_0 = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ zur Zeit $t = 0$ in einem Zeitraum von 20 s auf den Wert Null. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit $t = 20$ s, und welchen Weg legte er in dieser Zeit zurück, wenn er sich bei t_0 in Ruhe befand?

18. Eine Elektrolok fährt aus der Ruhestellung heraus mit einer gleichförmig wachsenden Beschleunigung an, so daß sie zur Zeit $t_1 = 100$ s den Wert $a_1 = 0{,}5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ annimmt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Lokomotive zur Zeit t_1 sowie den Weg, den sie dann vom Start aus zurückgelegt hat.

19. Die Beschleunigung eines Massenpunktes, der sich auf einer Geraden bewegt, ist durch die Beziehung $a = k_1 - k_2 v$ gegeben (v Geschwindigkeit des Massenpunktes, k_1, k_2 Konstanten). Ermitteln Sie die Zeitabhängigkeit der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der zurückgelegten Wegstrecke, wenn sich der Massenpunkt zur Zeit t_0 in Ruhe befand.

20. Aus einem Geschütz der Küstenartillerie, das in einer Höhe $h = 30$ m über NN aufgestellt ist, wird ein Geschoß unter dem Abschußwinkel $\varphi_0 = 45°$ und der Mündungsgeschwindigkeit $v_0 = 1000\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ abgefeuert. Wie groß ist der horizontale Abstand des auf dem Meeresspiegel gelegenen Zielpunktes von der Kanone? (Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.)

21. Wir bemerken ein unbewegtes Objekt in gerader Luftlinienentfernung $d = 6000$ m unter dem Winkel $\varphi = 30°$ über dem Horizont. Wie groß muß die Mündungsgeschwindigkeit eines Geschosses mindestens sein, um das Objekt noch erreichen zu können? Wie groß muß der entsprechende Abschußwinkel φ_0 sein?

22. Ein Massenpunkt bewegt sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10\,s^{-1}$ auf einem Kreis mit dem Radius $r = 2$ m. Berechnen Sie Periodendauer, Frequenz und Zentripetalbeschleunigung dieser Bewegung.
23. Ein Massenpunkt vollführt eine Bewegung auf einem Kreis mit dem Radius $r = 0{,}2$ m und der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 2\,s^{-2}$. Berechnen Sie den Wert der Tangential-, Normal- und Gesamtbeschleunigung am Ende der vierten Sekunde von Beginn der Bewegung an gerechnet, wenn sich der Massenpunkt zur Zeit t_0 in Ruhe befand.
24. Nach dem Verlassen einer Station wächst die Geschwindigkeit eines Zuges gleichförmig an. Drei Minuten nach Abfahrt erreicht sie auf einer als Kreislinie gekrümmten Bahn mit dem Radius $r = 800$ m den Wert $v = 72$ km h^{-1}. Es ist der Wert der Tangential-, Normal- und Gesamtbeschleunigung für die Zeit $t = 2$ min, vom Zeitpunkt des Anfahrens gerechnet, zu bestimmen.
25. Ein Rad beginnt aus der Ruhestellung heraus eine Drehbewegung mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = 2\,s^{-2}$. Wieviel Umdrehungen macht das Rad in den ersten 15 Sekunden seiner Bewegung?
26. Ein Rad beginnt aus der Ruhestellung heraus sich gleichförmig beschleunigt zu drehen, und zwar so, daß es während der ersten fünf Sekunden 12,5 Umdrehungen ausführt. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit am Ende der fünften Sekunde?
27. Durch einen Treibriemen wird von einem Rad A mit dem Durchmesser $d_A = 0{,}5$ m, welches in der Minute 30 Umdrehungen ausführt, eine Drehbewegung auf das Rad B mit dem Durchmesser $d_B = 0{,}25$ m übertragen. Wieviel Umdrehungen je Minute vollführt das Rad B?
28. In einem 300 m breiten Flußbett fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m s^{-1}. Ein Fährschiff bewegt sich relativ zum Wasser mit der Geschwindigkeit 5 m s^{-1}. In welcher Richtung muß sich das Fährschiff bewegen, wenn es in kürzester Zeit das andere Ufer erreichen soll, und wie lange dauert die Überfahrt?
29. Ein Zug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 60 km h^{-1}. Regentropfen, die bei Windstille infolge Luftreibung mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht herabfallen, hinterlassen auf den Fensterscheiben des Zuges Spuren, die um 30° von der Senkrechten abweichen. Mit welcher Geschwindigkeit fallen die Tropfen?
30. Ein Punkt M bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit c, von der Spitze ausgehend, auf der Mantellinie eines Kegels. Der Kegel selbst rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes zur Zeit t, vom Bewegungsbeginn an gerechnet, zu bestimmen, wenn der Winkel zwischen Mantellinie und Kegelachse mit φ angegeben wird.
31. Ein Rad mit dem Radius r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine senkrecht zur Radebene gerichtete und durch seinen Mittelpunkt gehende Achse so, daß es in der Minute n_1 Umdrehungen ausführt. Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt M (Bild 14) gleichförmig auf dem Radumfang in entgegengesetzter Richtung, indem er in der Minute n_2 Umläufe längs des Rad-

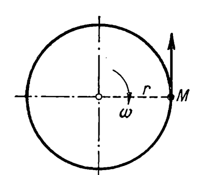


Bild 14

umfanges ausführt. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes M zu bestimmen.

32. Eine Stange OA dreht sich um eine senkrecht zu ihr gerichtete und durch den Punkt O der Stange verlaufende Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Punkt M (Bild 15) bewegt sich mit konstanter relativer Geschwindigkeit v' längs der Stange. Es ist die absolute Beschleunigung des Punktes M zu bestimmen.

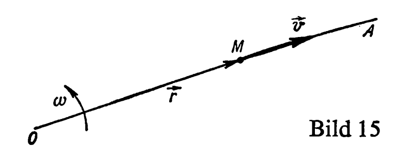


Bild 15

1.2. Dynamik des Massenpunktes

Die Dynamik gründet sich auf die drei NEWTONschen Bewegungsgesetze.

Erstes Bewegungsgesetz (Trägheitssatz)

Ein Massenpunkt befindet sich im Zustand der Ruhe oder vollführt eine gleichförmig geradlinige Bewegung, solange er nicht durch die Wirkung anderer Körper gezwungen wird, diesen seinen Bewegungszustand zu ändern.

Da wir die wechselseitige Einwirkung von Körpern mit dem Begriff Kraft bezeichnen, kann man das erste Bewegungsgesetz folgendermaßen formulieren:

Ein Massenpunkt befindet sich im Zustand der Ruhe oder vollführt eine gleichförmig geradlinige Bewegung, solange er nicht durch die Wirkung bestimmter Kräfte gezwungen wird, diesen seinen Bewegungszustand zu ändern.

Zweites Bewegungsgesetz (Kraftgesetz)

Eine Kraft, die auf einen Massenpunkt einwirkt, ist proportional dem Produkt seiner Masse und der Beschleunigung, die sie ihm verleiht.

Mathematisch kann man das Kraftgesetz (wenn die zugehörige Proportionalitätskonstante gleich eins gesetzt wird) durch die folgende Formel ausdrücken:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{1}$$

wobei $\vec{a}$ die Beschleunigung darstellt, welche die Kraft $\vec{F}$ dem Massenpunkt mit der Masse m verleiht. (Für zeitlich veränderliche Masse gilt $\vec{F} = \mathrm{d}(m\vec{v})/\mathrm{d}t$.)

Ein Sonderfall der Kraft ist die Gewichtskraft $\vec{G}$ eines Körpers. Es gilt dafür die Beziehung $\vec{G} = m\vec{g}$, wobei $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist.

Drittes Bewegungsgesetz (Wechselwirkungsgesetz)

Die Kräfte, mit denen zwei Körper aufeinander einwirken, sind gleich groß, jedoch von umgekehrter Richtung.

Wenn auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ einwirken, dann ist ihr Einfluß auf den Massenpunkt so groß, als ob auf ihn eine einzige, die resultierende Kraft $\vec{F}_r$ einwirkte, die durch die Summe der wirkenden Kräfte als Vektoren, d. h. $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i$, gegeben ist.

Für den Fall, daß $\sum \vec{F}_i = 0$ ist, sprechen wir davon, daß sich der Massenpunkt im Gleichgewicht befindet.
Die Gültigkeit der NEWTONschen Bewegungsgesetze ist an **inertiale** Bezugssysteme gebunden. Ein solches ist z. B. das an die Fixsterne angeschlossene Bezugssystem sowie jedes andere, das in bezug auf das an die Fixsterne gebundene System eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt.
Wenn wir die Bewegung eines Massenpunktes auf ein **nichtinertiales** Bezugssystem beziehen, dann müssen wir außer den Kräften, mit denen wir es im Inertialsystem selbst zu tun haben und durch die wir die gegenseitigen Einflüsse der Körper kennzeichnen, auch die sog. Trägheitskräfte berücksichtigen, und an Stelle von Gl. (1) muß dann geschrieben werden:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_1, \tag{2}$$

wobei $\vec{F}$ die Resultierende der Trägheitskräfte darstellt.
Wenn es sich um ein solches nichtinertiales System handelt, das gegenüber irgendeinem anderen inertialen System eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung mit der Beschleunigung $\vec{a}^*$ vollführt, dann gilt $\vec{F} = -m\vec{a}^*$.
Wenn wir es mit einem nichtinertialen System zu tun haben, das sich gegenüber irgendeinem Inertialsystem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht (als solches kann man auch ein mit unserer Erde fest verbundenes System ansehen), dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_0 + \vec{F}_C, \\ \vec{F}_0 &= m(\omega \times \vec{r}') \times \vec{\omega}, \\ \vec{F}_C &= -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') \end{aligned} \tag{3}$$

($\vec{F}_0$ Zentrifugalkraft, $\vec{F}_C$ CORIOLIS-Kraft). Die Bedeutung der Symbole in den Gln. (3) ist folgende: Der Vektor $\vec{r}$ ist der Ortsvektor des Massenpunktes m hinsichtlich eines Bezugspunktes auf der Drehachse, der Vektor $\vec{v}'$ stellt die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes gegenüber dem angegebenen nichtinertialen System dar.
Der **Impuls der Kraft** $\vec{F}$, die auf einen Massenpunkt während der Zeit t einwirkt, ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\vec{p} = \int_0^t \vec{F}\, \mathrm{d}t.$$

Für die konstante Kraft gilt offensichtlich $\vec{p} = \vec{F}t$.
Die **Bewegungsgröße** eines Massenpunktes wird durch die Beziehung $\vec{p} = m\vec{v}$ ausgedrückt. Zwischen dem Kraftstoß und der Bewegungsgröße eines Massenpunktes, auf den eine Kraft wirkt, besteht der Zusammenhang

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0,$$

d. h., der Impuls der auf einen freien Massenpunkt wirkenden Kraft entspricht dem Zuwachs seiner Bewegungsgröße.

Die **Arbeit** als die Wirkung einer Kraft längs eines Weges definieren wir in der Mechanik durch die Beziehung

$$\vec{W} = \int_{(\vec{r}_1)}^{(\vec{r}_2)} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

($\vec{r}_1$ Ortsvektor des Anfangspunktes, $\vec{r}_2$ Ortsvektor des Endpunktes der Bahn, auf der sich der Angriffspunkt der Einzelkraft $\vec{F}$ bewegt). Im Sonderfall, wenn die Kraft konstant und die Bahn, auf der sich der Angriffspunkt der Kraft bewegt, gerade ist und in der Kraftrichtung liegt, kann die Arbeit auf einfache Weise durch das Produkt aus Kraft und Bahnlänge ausgedrückt werden.

Die **kinetische Energie** eines in Bewegung begriffenen Massenpunktes ist durch die Beziehung $W = {}^1/_2\, mv^2$ gegeben. Der Satz von der kinetischen Energie besagt folgendes:

Die Arbeit, die die auf einen Massenpunkt einwirkende Kraft auf einem bestimmten Wege verrichtet, ist gleich dem Anwachsen der kinetischen Energie des Massenpunktes, d. h.

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

(v Geschwindigkeit des Massenpunktes am Ende des entsprechenden Weges, v_0 Geschwindigkeit am Anfangspunkt).

Die **Leistung** P wird durch den Ausdruck definiert

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Für den Fall, daß die Arbeit mit der Zeit gleichförmig anwächst, kann die Leistung durch die Beziehung $P = W/t$ ausgedrückt werden, wobei W die in der Zeit t verrichtete Arbeit darstellt.

Nach dem allgemeinen **Newtonschen Gravitationsgesetz** wirken zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 mit einer Kraft aufeinander, die den Wert hat

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(r gegenseitige Entfernung der Massenpunkte, γ sog. allgemeine Gravitationskonstante).

Die Kraft, mit der ein Massenpunkt der Masse m_1 auf einen anderen der Masse m_2 wirkt, kann in der Form ausgedrückt werden

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12},$$

wobei $\vec{r}_{12}$ der Ortsvektor des zweiten Massenpunktes in bezug auf den ersten ist und den Wert $r = |\vec{r}_{12}|$ hat.

Die **Feldstärke** $\vec{E}$ in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes ist derjenige Anteil der Kraft $\vec{F}$, der im gegebenen Punkt des Feldes auf die Masseneinheit wirkt, d. h.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

In der Umgebung eines Massenpunktes der Masse M gilt für die Gravitationsfeldstärke

$$\vec{E} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r},$$

wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor desjenigen Punktes, in dem die Feldstärke gesucht ist, in bezug auf den Massenpunkt mit der Masse M darstellt.

In der Umgebung mehrerer Massenpunkte der Massen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ berechnen wir die Gravitationsfeldstärke in einem bestimmten Punkt als die Vektorsumme der Feldstärken der einzelnen Massenpunkte, die im gegebenen Punkt zusammenwirken, d. h.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = -\gamma \frac{M_1}{r^3} \vec{r}_1 - \gamma \frac{M_2}{r^3} \vec{r}_2 - \cdots -\gamma \frac{M_n}{r^3} \vec{r}_n =$$

$$= -\gamma \sum \frac{M_i}{r^3} \vec{r}_i.$$

Die angegebene Summierung geht in eine Integration über, wenn es sich um ein Gravitationsfeld in der Umgebung eines Körpers handelt, der homogen mit Masse erfüllt ist.

Die **potentielle Energie** eines Massenpunktes der Masse m in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes ist für irgendeinen Bezugspunkt durch die *Arbeit* gegeben, welche die Feldkräfte verrichten, wenn der Massenpunkt von der Stelle, an der die potentielle Energie bestimmt werden soll, zum Bezugspunkt bewegt wird. Analog wird die potentielle Energie eines Massenpunktes definiert, der sich in einem anderen Kraftfeld befindet. (Ein an einer nicht in der Gleichgewichtslage befindlichen Feder aufgehängter Massenpunkt unterliegt z. B. der Einwirkung durch die Federkräfte.)

Im Gravitationsfeld einer *Punktmasse* M ist die potentielle Energie eines Massenpunktes der Masse m durch die Gl.

$$W_p = -\gamma m M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{4}$$

gegeben, wobei r die Entfernung der Stelle, in der wir die potentielle Energie des Massenpunktes m bestimmen wollen, von der Punktmasse M ist und r_0 die Entfernung des Bezugspunktes von der Punktmasse M angibt. In den meisten Fällen beziehen wir die potentielle Energie auf einen unendlich weit entfernten Bezugspunkt, wodurch $r_0 = \infty$ wird und Gl. (4) die Gestalt annimmt

$$W_p = -\gamma m M \frac{1}{r}. \tag{5}$$

Für die potentielle Energie eines auf einer Feder liegenden Massenpunktes findet man beim Ausschlag x bezüglich der Gleichgewichtslage folgenden Wert:

$$W_p = W = \int\limits_x^0 -kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2,$$

wenn wir voraussetzen, daß die Kraft, mit der die Feder auf den Massenpunkt einwirkt, $F = -kx$ ist.

Das **Potential** in einem bestimmten Punkt eines Gravitationsfeldes entspricht der Arbeit W, die aufgewendet werden muß, um eine Masse m vom gegebenen Punkt bis ins Unendliche zu bringen:

$$V = \frac{W}{m} = \frac{1}{m} \int\limits_\infty^r \gamma \frac{mM}{r^2} \, dr.$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (5) ist das Gravitationspotential in der Umgebung einer Punktmasse M, bezogen auf Unendlich, durch die Beziehung gegeben:

$$V = -\gamma \frac{M}{r}.$$

In der Umgebung mehrerer Punktmassen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ berechnen wir das Gravitationspotential in einem bestimmten Punkt als die Summe der Potentiale der einzelnen Punktmassen, d. h.

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = -\gamma \frac{M_1}{r_1} - \gamma \frac{M_2}{r_2} - \cdots - \gamma \frac{M_n}{r_n} = -\gamma \sum \frac{M_i}{r_i},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Entfernungen der Stelle, für die das Potential gesucht wird, von den Punktmassen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ darstellen. Diese Summierung geht in die Integration über, wenn es sich um ein Gravitationsfeld in der Umgebung eines Körpers handelt, der homogen mit Masse erfüllt ist.
Zwischen der Stärke $\vec{E}$ und dem Potential V gilt in jedem beliebigen Punkt des Gravitationsfeldes folgender Zusammenhang:

$$\vec{E} = -\text{grad}\, V,$$

wobei

$$\text{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad \text{bedeutet.}$$

Der **Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie** sagt aus, daß bei der mechanischen Bewegung eines Massenpunktes die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie konstant ist.
Wenn wir es mit der Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld der Erde in Nähe der Erdoberfläche zu tun haben, dann kann das oben formulierte Gesetz durch die Beziehung ausgedrückt werden

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const},$$

wobei h die Höhe des Massenpunktes über einer horizontalen Ebene ist, auf die wir seine potentielle Energie beziehen. Die Gültigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der mechanischen Energie beschränkt sich auf alle die Fälle, wo es sich um die Umwandlung einer Form mechanischer Energie in eine andere handelt (potentielle in kinetische und umgekehrt), d. h., wobei keine anderen Energieformen auftreten. Im allgemeinen Fall gilt das Gesetz von der Erhaltung und Umwandlung der Energie wie folgt:
In einem isolierten System ist die Summe der Energien aller Formen immer konstant.
In einem solchen System laufen die einzelnen Prozesse so ab, daß die Energie der einen Form immer in äquivalente Energie anderer Formen übergeht, so daß die Gesamtenergie des Systems stets erhalten bleibt.

B Beispiele

23. Stellen Sie fest, in welchem Verhältnis die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zueinander stehen, wenn sie den Winkel $\varphi = 135°$ einschließen und wenn der Betrag ihrer Resultierenden gleich dem Betrag der kleineren Kraft $\vec{F}_2$ ist.

Lösung

Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen auf Bild 16 kann geschrieben werden

$$180° - \alpha = 45°; \quad \gamma = 90°.$$

Es ist also

$$F_1 : F_2 = \sin 90° : \sin 45°.$$

Daraus folgt

$$\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}.$$

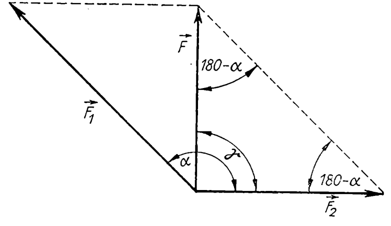


Bild 16

24. Die Kraft $\vec{F}$ ist so in die beiden zueinander senkrechten Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zu zerlegen, daß die Proportion $F_1 : F_2 = m : n$ gilt. Ermitteln Sie die Beträge der beiden Komponenten.

Lösung

Entsprechend der Aufgabenstellung kann geschrieben werden

$$F_1^2 + F_2^2 = F^2.$$

Ferner ist $F_1 = \frac{m}{n} F_2$, so daß

$$\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right) F_2^2 = F^2, \quad \text{d. h.} \quad F_2 = \frac{nF}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ ist.}$$

Da $F_2 = \frac{n}{m} F_1$, kann man analog folgendes schreiben:

$$\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right) F_1^2 = F^2, \quad \text{d. h.} \quad F_1 = \frac{mF}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

25. Ein Körper vom Gewicht $G = 50\,\text{N}$ bewegt sich mit einer Beschleunigung $a = 12\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ senkrecht nach unten. Welche Kraft wirkt außer seinem Gewicht noch auf ihn ein?

Lösung

Entsprechend dem II. NEWTONschen Bewegungsgesetz kann man für die Gesamtkraft, die auf den Körper wirkt, auch schreiben:

$$F = ma = \frac{G}{g} a = \frac{50\,\text{N}}{9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}} \, 12\,\text{m}\,\text{s}^{-2} = 61{,}2\,\text{N}.$$

Die Kraft F^*, die auf den Körper noch neben dem Gewicht einwirkt, ist dann durch die folgende Beziehung gegeben:

$$F^* = F - G = 61{,}2\,\text{N} - 50\,\text{N} = \underline{11{,}2\,\text{N}}.$$

26. In welcher Zeit durchläuft ein Wagen mit dem Gewicht $\vec{G}_1$ die Strecke s auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α, wenn der Wagen mit einer Last $\vec{G}_2$ (Bild 17) gekoppelt ist und wenn sich aus dem Zusammenwirken von $\vec{G}_1$ und $\vec{G}_2$ eine Bewegung in Richtung der Kraft $\vec{G}_2$ ergibt? Die Trägheitsmomente der Räder bleiben unberücksichtigt.

Lösung

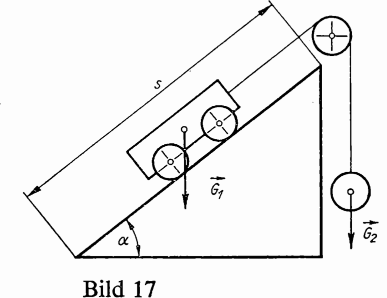


Bild 17

Die Bewegung des Wagens auf der schiefen Ebene wird durch die Kraft $\vec{G}_2$ und durch die in Richtung der schiefen Ebene fallende Gewichtskomponente des Wagens beeinflußt, so daß die resultierende Kraft in Richtung der Bewegung den Wert annimmt

$$F = G_2 - G_1 \sin\alpha.$$

Für die Beschleunigung des Wagens gilt dann

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha}{\dfrac{G_1 + G_2}{g}} = \frac{(G_2 - G_1 \sin\alpha)g}{G_1 + G_2},$$

da die resultierende Kraft nicht nur eine Bewegung des Wagens mit der angegebenen Beschleunigung, sondern auch eine Bewegung der Last G_2 hervorruft. Für den zurückgelegten Weg gilt die Beziehung

$$s = \frac{1}{2} at^2.$$

Daraus folgt für die gesuchte Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \underline{\sqrt{\frac{2s(G_1 + G_2)}{g(G_2 - G_1 \sin\alpha)}}}.$$

27. Ein Körper mit dem Gewicht $G = 100\,\text{N}$ bewegt sich unter Einfluß einer veränderlichen Kraft $F = k(q - t)$, wobei $k = 100\,\text{N}\,\text{s}^{-1}$ und $q = 1$ s ist. Nach wieviel Sekunden kommt der Körper zum Stillstand, wenn er zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ hatte und die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit wies? Welchen Weg legte der Körper bis zu seinem Stillstand zurück?

Lösung

Die Bewegungsgleichung des Körpers hat die Gestalt

$$m \frac{dv}{dt} = k(q - t).$$

Durch Integration erhalten wir

$$v = \frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0.$$

In dem Moment, da der Körper zum Stillstand kommt, ist die Geschwindigkeit $v = 0$, so daß man findet

$$\frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0 = 0.$$

Nach Umstellung erhalten wir für die gesuchte Zeit die Gleichung

$$t^2 - 2qt - \frac{2mv_0}{k} = 0.$$

Mit den für die gegebenen Größen geltenden Werten hat diese Gleichung die Wurzeln

$$t_{1,2} = \begin{cases} 2{,}02\ \text{s} \\ -0{,}02\ \text{s} \end{cases}.$$

Da die negative Wurzel keine physikalische Bedeutung hat, gilt als Zeit, nach der der Körper die Geschwindigkeit Null erreicht hat, $t = 2{,}02$ s.

Für den vom Körper zurückgelegten Weg finden wir

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{m}\left(qt - \frac{t^2}{2}\right) + v_0.$$

Nach Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$s = \frac{k}{m}\left(q\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + v_0 t.$$

Nach Einsetzen des gefundenen Wertes für die Zeit $t = 2{,}02$ s sowie der übrigen Größen erhalten wir für die Wegstrecke, die der Körper bis zum Stillstand zurücklegt, den Wert $s = 7{,}07$ m.

28. Es ist die maximale Geschwindigkeit zu bestimmen, die ein Körper von Kugelform mit einem Radius $r = 8$ cm und dem Gewicht $G = 100$ N im freien Fall erreicht, wenn wir voraussetzen, daß für den Luftwiderstand die Beziehung $F_R = k\sigma v^2$ gilt (v Geschwindigkeit des Körpers, σ seine Projektionsfläche auf die senkrecht zur Bewegungsrichtung orientierte Ebene, k Zahlenfaktor). Letzterer hängt von der Form des Körpers ab und hat für die Kugel den Wert $k = 0{,}24\ \text{N s}^2\ \text{m}^{-4}$.

Lösung

Für den Wert der resultierenden Kraft, die während der Fallbewegung auf den Körper einwirkt, gilt die Beziehung

$$F = G - F_R = G - k\sigma v^2.$$

Der Körper wird zu Beginn eine beschleunigte Bewegung ausführen, jedoch nur, solange er eine verhältnismäßig geringe Geschwindigkeit aufweist, so daß $F > 0$ ist. Seine maximale Geschwindigkeit erreicht er in dem Moment, in dem $F = 0$ ist. Von da an bewegt er sich dann mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig gleichförmig weiter. Es ist demnach

$$G - k\sigma v_{\max}^2 = 0.$$

Da im Sinne der Aufgabenstellung $\sigma = \pi r^2$ angesetzt war, finden wir als Endgeschwindigkeit

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{G}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{100\ \mathrm{N}}{0{,}24\ \mathrm{N\ s^2\ m^{-4}} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}08^2\ \mathrm{m^2}}} = \underline{144\ \mathrm{m\ s^{-1}}}.$$

29. Im Eisenbahnwagen eines fahrenden Zuges ist auf einer waagerechten Unterlage eine Kugel der Masse $m = 0{,}02$ kg frei beweglich angeordnet. Solange der Zug sich in gleichförmig geradliniger Bewegung befindet, bleibt die Kugel in bezug auf ihre Unterlage in Ruhe. In einem bestimmten Moment beginnt der Zug, mit der konstanten Beschleunigung $a = -2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ zu bremsen.
Ermitteln Sie die Kraft, die auf die Kugel wirkt, und untersuchen Sie ihre Bewegung bezüglich der Unterlage, auf die sie gelegt wurde. Reibungswiderstände bleiben unberücksichtigt.

Lösung

Im Augenblick, da der Zug zu bremsen beginnt, wird er zu einem nichtinertialen System, in dem außer dem Gewicht der Kugel $G = mg$ auch die auf die Kugel wirkende Trägheitskraft F berücksichtigt werden muß. Im Falle dieses nichtinertialen Systems ist $F = -ma$ (m Masse der Kugel, a Verzögerung des Zuges).
Die Trägheitskraft verläuft in waagerechter Richtung und ist der Verzögerung a des Zuges gerade entgegengesetzt gerichtet. Die resultierende Kraft, die auf die Kugel wirkt, ist dann F, denn die Wirkung des Gewichts der Kugel wird durch die Gegenwirkung ihrer Unterlage kompensiert. Es gilt also

$$F = -ma = 0{,}02\ \mathrm{kg} \cdot 2\ \mathrm{m\ s^{-2}} = \underline{0{,}04\ \mathrm{N}}.$$

Demnach setzt sich die Kugel in Fahrtrichtung des Zuges mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ in Bewegung. Sie führt eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung aus.

30. An einem Ort von 45° geographischer Breite fällt ein Körper der Masse $m = 10$ kg mit der Geschwindigkeit $v = 100\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ auf die Erdoberfläche.
Welchen Wert haben die Trägheitskräfte Zentrifugalkraft und CORIOLIS-Kraft, die beim Auftreffen auf die Erdoberfläche auf den Körper einwirken?

Lösung

Für die Trägheitskräfte Zentrifugalkraft und CORIOLIS-Kraft gelten die folgenden Beziehungen (Bild 18):

$$F_0 = mr\omega^2 = mR\cos\varphi \cdot \omega^2;$$

$$F_C = 2m\,|\vec{\omega} \times \vec{v}| = 2m\omega v \sin(90^\circ + \varphi) = 2m\omega v \sin\varphi.$$

Ferner ist

$$\omega = \frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}} \quad \text{und} \quad R = 6370\ \mathrm{km};$$

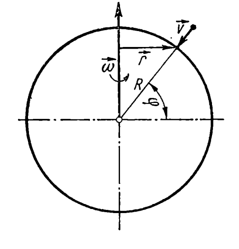


Bild 18

deshalb können wir schreiben

$$F_0 = mR\omega^2 \cos\varphi = 10\ \mathrm{kg} \cdot 6370 \cdot 10^3\ \mathrm{m}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{86400^2\ \mathrm{s}^2} =$$

$$= \underline{0{,}238\ \mathrm{N}};$$

$$F_C = 2 \cdot 10\ \mathrm{kg}\ \frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}} \cdot 10^2\ \mathrm{m\,s^{-1}}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{0{,}104\ \mathrm{N}}.$$

Wie ersichtlich, ist im vorgegebenen Fall die Zentrifugalkraft etwas größer als $2^0/_{00}$ und die CORIOLIS-Kraft ungefähr $1^0/_{00}$ vom Gewicht des Körpers. Die angegebene Geschwindigkeit wird nach einem freien Fall aus etwa 500 m Höhe erreicht. Aus dem oben Dargelegten wird ersichtlich, daß die Fehler, die aus der Vernachlässigung von Trägheitskräften resultieren, wenn es sich um Bewegungen von Körpern nahe der Erdoberfläche handelt, nur äußerst geringfügig sind.

31. Ein Auto mit einem Gewicht $G = 10$ kN bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 36\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ auf einer konvex gewölbten Brücke. In der Brückenmitte beträgt der Krümmungsradius $r = 50$ m. Welche Druckkraft übt der Wagen im Moment des Durchfahrens der Brückenmitte auf seine Unterlage aus?

Lösung

Bei der Behandlung dieser Aufgabe stellen wir uns auf den Standpunkt des mit dem Auto fest verbundenen Bezugssystems. Die resultierende Kraft, mit welcher der Wagen auf die Brücke wirkt, ergibt sich dann als die Differenz zwischen dem Fahrzeuggewicht und der Zentrifugalkraft als Trägheitskraft gemäß der Beziehung

$$F = G - F_0 = G - m\frac{v^2}{r} = 10\ \mathrm{kN} - \frac{10\ \mathrm{kN}}{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}\ \frac{100\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}{50\ \mathrm{m}} =$$

$$= \underline{7962\ \mathrm{N}}.$$

32. Ein Massenpunkt der Masse $m = 1$ kg ist an einem Faden der Länge $l = 0{,}3$ m befestigt, dessen anderes Ende gleichfalls befestigt wurde (Bild 19). Der Massenpunkt bewegt sich so, daß er in waagerechter Ebene mit konstanter Geschwindigkeit v einen Kreis beschreibt, wobei der Faden mit der Senkrechten den Winkel $\varphi = 60°$ einschließt. Ermitteln Sie den Wert der Geschwindigkeit v, die Periodendauer des Massenpunktes auf der angegebenen Kreisbahn sowie die Kraft, die bei dieser Bewegung den Faden spannt.

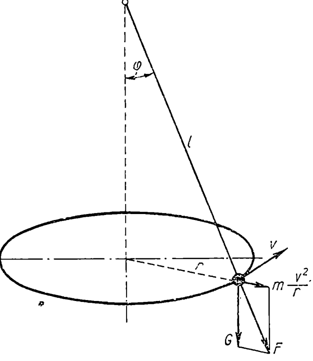


Bild 19

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe stellen wir uns auf den Standpunkt eines mit dem Massenpunkt fest verbundenen Bezugssystems. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, befindet sich der Massenpunkt in Ruhe, und zwar deshalb, weil die Resultierende aus dem Gewicht des Massenpunktes und der Zentrifugalkraft als Trägheitskraft, die auf den Massenpunkt wirkt, in Richtung des Fadens weist und in ihrer Wirkung durch die Festigkeit des Fadens kompensiert wird. Nach Bild 19 gilt:

$$\tan\varphi = \frac{m\dfrac{v^2}{r}}{G} = \frac{mv^2}{Gl\sin\varphi},$$

weil $r = l\sin\varphi$ ist. Man findet also

$$v = \sqrt{\frac{Gl\sin\varphi\tan\varphi}{m}} = \sqrt{gl\sin\varphi\tan\varphi} = \underline{2{,}1\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

Für die Periodendauer des Massenpunktes auf der angegebenen Kreisbahn ergibt sich

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l\sin\varphi}{v} = \underline{0{,}78\ \mathrm{s}}.$$

Und für die Kraft F, durch welche der Faden gespannt wird, finden wir gemäß Bild 19 die Beziehung $F\cos\varphi = G$, d. h.

$$F = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{G}{0{,}5} = \underline{19{,}6\ \mathrm{N}}.$$

33. Ein Körper der Masse m führt eine gleichförmig geradlinige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 aus. Durch Bremswirkung soll er auf der Strecke s_0 zum Stillstand gebracht werden. Dabei nimmt die Bremskraft F linear mit der Geschwindigkeit ab, und zwar so, daß am Ende ihres Einflusses, wenn der Körper schon zur Ruhe gekommen ist, ihre Größe nur mehr die Hälfte des ursprünglichen Wertes beträgt. Bestimmen Sie die Bremskraft F_0 zu Beginn des Bremsvorgangs.

Lösung

Zur Bestimmung der Abhängigkeit $F = F(v)$ müssen wir berücksichtigen, daß für $v = v_0$ die Bremskraft $F = F_0$ ist und daß für $v = 0$ die Bremskraft auf den halben ursprünglichen Wert abgenommen hat entsprechend $F = F_0/2$. Diesen Bedingungen wird, der Aufgabenstellung entsprechend, folgende Abhängigkeit gerecht:

$$F = \frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right).$$

Da nun Geschwindigkeit des Körpers und Bremskraft in die gleiche Gerade fallen, aber entgegengesetzte Richtungen haben, nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right). \qquad (1)$$

Unter Verwendung der Beziehung $ds = v\,dt$, $dt = ds/v$ kann Gl. (1) in eine andere Form gebracht werden:

$$\frac{mv\,dv}{ds} = -\frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right), \quad \text{d. h.} \quad -\frac{2m}{F_0}\frac{v\,dv}{1 + \dfrac{v}{v_0}} = ds.$$

Durch Integrieren der vorstehenden Gleichung von Beginn des Bremsweges bis zum Stillstand des Körpers erhalten wir

$$\frac{2mv_0}{F_0}\left[v - v_0 \ln(v + v_0)\right]_0^{v_0} = s_0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2mv_0^2}{F_0}(1 - \ln 2) = s_0.$$

Mithin ergibt sich für den Wert der Bremskraft zu Beginn des Bremsvorgangs

$$\underline{F_0 = \frac{2mv_0^2}{s_0}(1 - \ln 2).}$$

34. Eine konstante Kraft F wirke auf einen Körper mit dem Gewicht G. In welcher Zeit vergrößert sich hierbei die Geschwindigkeit des Körpers auf den n-fachen Wert der ursprünglichen Geschwindigkeit v_0, die der Körper in dem Augenblick innehatte, als die Kraft auf ihn zu wirken begann?

Lösung

Der Satz über den wechselseitigen Zusammenhang von Kraftimpuls und Bewegungsgröße ermöglicht folgende Schreibweise:

$$Ft = mnv_0 - mv_0,$$

woraus für die gesuchte Zeit resultiert

$$t = \frac{mv_0(n-1)}{F} = \underline{\frac{Gv_0(n-1)}{Fg}}.$$

35. Welchen Impuls vermittelt eine Wand einer elastischen Kugel der Masse $m = 0{,}2$ kg, wenn diese unter einem Winkel $\varphi = 60°$ gegen die Flächennormale und mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20\ \mathrm{ms}^{-1}$ auf die Wand trifft?

Lösung

Der Kraftimpuls, mit dem die Wand beim Anprall auf die Kugel wirkt, ist gleich der Änderung der Bewegungsgröße der Kugel, d. h.,

$$\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0.$$

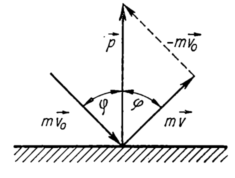


Bild 20

Wenn wir wie in Bild 20 völlig elastische Reflexion voraussetzen, prallt die Kugel mit gleicher Geschwindigkeit und unter gleichem Winkel von der Wand zurück, so daß wir für den Wert des Impulses schreiben können:

$$|\vec{p}| = 2mv\cos\varphi = 2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{kg} \cdot 20\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos 60° = \underline{4\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}.$$

36. Welche Arbeit muß beim Zusammendrücken der Feder eines Waggonpuffers um den Weg $x_0 = 0{,}05$ m verrichtet werden, wenn für das Zusammendrücken um den Weg $x_1 = 0{,}01$ m eine Kraft von 30 kN erforderlich ist, wobei die Kraft proportional zur Verkürzung der Feder anwächst?

Lösung

Da die Kraft und die Bahn ihres Angriffspunktes ein und dieselbe Richtung haben, kann für die Arbeit geschrieben werden:

$$W = \int F\,\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt für die Feder $F = kx$ und $k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{30\ \mathrm{kN}}{0{,}01\ \mathrm{m}}$, so daß wir für die Arbeit erhalten:

$$W = \int_0^{x_0} kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{30\ \mathrm{kN} \cdot 0{,}0025\ \mathrm{m}^2}{0{,}01\ \mathrm{m}} = \underline{3750\ \mathrm{Nm}}.$$

37. Eine Kugel schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ϱ so, daß sie bis zur Hälfte eingetaucht ist. Welche Arbeit muß zum Herausheben der Kugel aus der Flüssigkeit verrichtet werden, wenn ihr Radius mit R angesetzt wird?

Lösung

Nach Bild 21 können wir unter Berücksichtigung des Archimedischen Prinzips schreiben:

$$W = \int_0^R F\,\mathrm{d}y = \int_0^R (G - V\varrho g)\,\mathrm{d}y, \qquad (1)$$

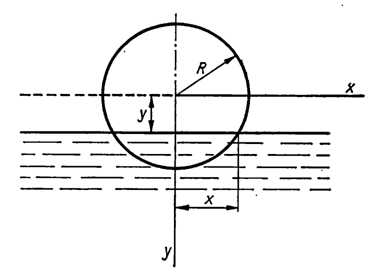


Bild 21

wobei V der in die Flüssigkeit eingetauchte Teil des Kugelvolumens ist. Man kann es aus der Beziehung

$$V = \pi \int_{R-y}^{R} x^2 \, dy = \pi \int_{R-y}^{R} (R^2 - y^2) \, dy = \left[\pi\left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\right]_{R-y}^{R} = \pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3$$

berechnen, wenn für den Ausdruck x^2 die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = R^2$ verwendet wird. Das gestattet uns dann, Gl. (1) folgendermaßen umzustellen:

$$W = \int_0^R \left[G - \left(\pi R y^2 - \frac{1}{3} \pi y^3\right) \varrho g\right] dy = \left[Gy - \left(\pi R \frac{y^3}{3} - \frac{1}{12} \pi y^4\right) \varrho g\right]_0^R =$$

$$= GR - \left(\frac{1}{3} \pi R^4 - \frac{1}{12} \pi R^4\right) \varrho g = GR - \frac{1}{4} \pi R^4 \varrho g.$$

Da jedoch entsprechend der Aufgabenstellung für das Gewicht gilt $G = \frac{2}{3} \pi R^3 \varrho g$, können wir schließlich die gesuchte Arbeit schreiben als

$$W = \frac{2}{3} \pi R^3 \varrho g R - \frac{1}{4} \pi R^4 \varrho g = \underline{\frac{5}{12} \pi R^4 \varrho g}.$$

38. Die Hubwinde eines Aufzugs, der mit einem Gesamtgewicht von $G = 10$ kN belastet ist, wird mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 2\ \text{m s}^{-2}$ betrieben. Berechnen Sie die Arbeit, die während der ersten fünf Sekunden des Hubvorgangs verrichtet wird.

Lösung

Die Kraft, welche die notwendige Arbeit verrichtet, überwindet das Gewicht des Aufzugs und verleiht ihm darüber hinaus noch eine Beschleunigung a, so daß sie den folgenden Wert annimmt:

$$F = G + ma = G + \frac{G}{g} a = G\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 10\ \text{kN}\left(1 + \frac{2\ \text{m s}^{-2}}{9{,}81\ \text{m s}^{-2}}\right) =$$

$$= 12{,}038\ \text{kN}.$$

Für den Weg, den der Angriffspunkt dieser Kraft während der Zeit $t = 5$ s zurücklegt, erhalten wir

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 2\ \text{m s}^{-2} \cdot 25\ \text{s}^2 = 25\ \text{m}.$$

Für die gesuchte Arbeit finden wir dann

$$W = Fs = 12{,}04\ \text{kN} \cdot 25\ \text{m} = \underline{301\ \text{kNm}}.$$

39. Welche Zugkraft kann eine Lokomotive mit einer Leistung von $P = 2500$ PS bei der Geschwindigkeit $v = 60\ \text{km h}^{-1}$ theoretisch maximal entwickeln?

Lösung

Entsprechend der Definition für die Leistung können wir schreiben:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\, ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Da $\vec{F}$ und $\vec{v}$ die gleiche Richtung haben, gilt $\vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$, so daß wir für die gesuchte Kraft erhalten:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{2500 \cdot 735{,}5\ \text{W}}{\dfrac{60\,000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}} = \underline{110\ \text{kN}}.$$

40. Wie lang muß ein Weg s sein, damit eine konstante Kraft F, die auf einen Körper der Masse m einwirkt, seine Geschwindigkeit auf den n-fachen Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu steigern vermag?

Lösung

Wir gehen von dem Satz aus, der besagt, daß die Arbeit, welche die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft längs eines bestimmten Weges verrichtet, gleich dem Zuwachs an kinetischer Energie des Massenpunktes ist. Also finden wir

$$Fs = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mn^2v_0^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2(n^2 - 1).$$

Für den gesuchten Weg erhalten wir damit

$$\underline{s = \frac{mv_0^2(n^2 - 1)}{2F}}.$$

41. An einer Stange der Länge $l = 1$ m und vernachlässigbarer Masse ist eine Kugel aufgehängt. Welche horizontale Geschwindigkeit muß man ihr mindestens verleihen, damit sie bis in die höchste Stellung ausschlägt? Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. Die potentielle Energie beziehen wir dabei auf die horizontale Ebene, die durch die Ruhelage der Kugel definiert ist. In der Ausgangsstellung ist dann die potentielle Energie der Kugel gleich Null, und die Gesamtenergie ist durch die Größe der kinetischen Energie gegeben. Wenn die gesuchte Geschwindigkeit v_0 so groß sein soll, daß die Kugel gerade noch ihre höchste Stellung erreicht, so hat sie in dieser höchsten Stellung die Geschwindigkeit Null, und damit ist ihre Gesamtenergie ausschließlich durch die ihr dann innewohnende potentielle Energie bestimmt. Wir können also wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = 2mgl,$$

und für die gesuchte Geschwindigkeit finden wir dann

$$v_0 = 2\sqrt{gl} = 2\sqrt{9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot 1 \text{ m}} = \underline{6{,}26 \text{ m s}^{-1}}.$$

42. Auf einer völlig glatten, unbeweglichen Kugel befindet sich ein Massenpunkt in labiler Stellung. Wenn wir ihn aus der Gleichgewichtslage auslenken, wird er sich zunächst auf der Kugeloberfläche bewegen. In welchem Abstand vom höchsten Punkt der Kugel verläßt der Massenpunkt ihre Oberfläche, und in welchem Abstand vom senkrechten Durchmesser der Kugel trifft er auf eine horizontale Unterlage, wenn der Radius der Kugel mit $R = 1{,}5$ m angegeben ist?

Lösung

Beim Studium der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kugeloberfläche erscheint es zweckmäßig, sich auf den Standpunkt eines Bezugssystems zu stellen, das mit dem bewegten Massenpunkt fest verbunden ist. Der Massenpunkt bleibt bei seiner Bewegung so lange auf der Kugeloberfläche, wie seine Gewichtskomponente in Richtung zum Kugelzentrum größer als die Zentrifugalkraft ist. Für den Punkt, in dem der Massenpunkt die Kugeloberfläche verläßt, kann nach Bild 22 geschrieben werden:

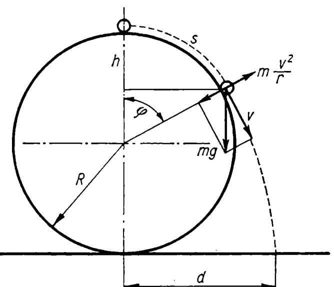


Bild 22

$$mg \cos\varphi = m\frac{v^2}{R}.$$

Unter Berücksichtigung von $\cos\varphi = \dfrac{R-h}{R}$ geht die vorstehende Gleichung über in

$$g\frac{R-h}{R} = \frac{v^2}{R}, \quad \text{d. h.,} \quad g(R-h) = v^2. \tag{1}$$

In Gl. (1) haben wir zwei Variable: h und v.
Eine weitere Gleichung für die Bestimmung dieser beiden Unbekannten erhalten wir aus dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie. Nach Durchlaufen des Weges s verringert sich die potentielle Energie um den Wert mgh, und dafür wächst seine kinetische Energie auf der gleichen Wegstrecke um $^1/_2\, mv^2$ an, so daß wir finden:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{d. h.,} \quad 2gh = v^2. \tag{2}$$

Aus den Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$g(R-h) = 2gh, \quad \text{d. h.,} \quad h = \frac{R}{3} = 0{,}5 \text{ m}.$$

Auf der Kugeloberfläche durchläuft der Massenpunkt den Weg $s = R\varphi$. Da $\cos\varphi = \dfrac{R-h}{R} = \dfrac{2}{3}$, $\varphi = 48°$ und im Bogenmaß $\varphi = 0{,}838$, können wir die Weglänge s

bestimmen zu

$$s = R\varphi = 1{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}838 = \underline{1{,}26\,\text{m}}.$$

Aus Gl. (2) erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot 0{,}5\,\text{m}} = 3{,}13\,\text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

Die Zeit t, nach welcher der Massenpunkt die horizontale Ebene erreicht, auf der die Kugel liegt, erhalten wir aus der Beziehung

$$2R - h = vt \sin\varphi + \frac{1}{2} gt^2.$$

Diese quadratische Gleichung nach t aufgelöst ergibt

$$t_{1,2} = \begin{cases} 0{,}51\,\text{s} \\ -0{,}99\,\text{s} \end{cases}$$

Die negative Wurzel hat offenbar keinen physikalischen Sinn. Für den Abstand Kugeldurchmesser – Auftreffpunkt ergibt sich

$$d = vt \cos\varphi + R \sin\varphi = 3{,}13\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \cdot 0{,}51\,\text{s} \cdot \frac{2}{3} + 1{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}743 = \underline{2{,}20\,\text{m}}.$$

43. In einer Metallkugel mit dem Radius R wurde ein kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius $r = R/2$ hergestellt (Bild 23). Es ist zu ermitteln, durch welche Kraft der auf diese Weise geschaffene Körper auf eine Kugel der Masse m wirkt, die sich in einem Abstand d vom Mittelpunkt der ursprünglichen Metallkugel befindet, wenn deren Masse mit M angegeben ist.

Lösung

Die ursprüngliche Metallkugel der Masse M würde auf den Massenpunkt m durch eine Kraft der Größe

$$F_0 = \gamma \frac{mM}{d^2}$$

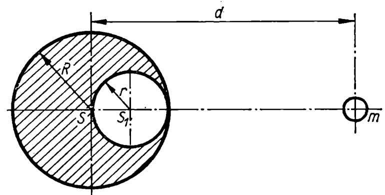


Bild 23

einwirken. Es läßt sich nämlich nachweisen, daß das Gravitationsfeld in der Umgebung eines homogenen Körpers von Kugelform das gleiche ist wie das eines Massenpunktes gleicher Masse, der an der Stelle des Kugelmittelpunktes liegt. Die Kraft F_0 kann als Summe zweier Kräfte aufgefaßt werden: F_x, mit der das Gebilde, das wir durch Herstellen des angegebenen Hohlraums erzielt haben, auf den Massenpunkt m wirkt, und F_1, mit welcher der Metallteil der Masse m' wirkt, der in der Kugel mit dem Mittelpunkt S_1 und dem Radius $r = R/2$ liegt. Es ist also

$$F_0 = F_x + F_1.$$

Für die Kraft F_1 gilt offensichtlich entsprechend dem Gravitationsgesetz

$$F_1 = \gamma \frac{mm'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2},$$

weil

$$m' = \frac{M}{{}^4/_3\pi R^3} \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{8} = \frac{M}{8}.$$

Für die gesuchte Kraft resultiert demnach

$$F_x = F_0 - F_1 = \gamma \frac{mM}{d^2} - \gamma \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \gamma mM \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right].$$

44. In welchem Punkt auf der direkten Verbindungslinie zwischen Erde und Mond ist die Stärke des gemeinsamen Gravitationsfeldes gleich Null, wenn die Masse des Mondes $^1/_{81}$ der Erdmasse beträgt?

Lösung

Die Bedingung der Kompensation der beiden Gravitationsfelder wird entsprechend der Bezeichnung in Bild 24 erfüllt, wenn

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0, \quad \text{d.h.,} \quad |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|. \tag{1}$$

Wenn wir den Abstand der beiden Mittelpunkte der Himmelskörper mit d angeben und den Abstand des Gravitationsnullpunktes vom Erdmittelpunkt mit der Größe x, dann gilt offenbar

$$\gamma \frac{M}{x^2} = \gamma \frac{{}^1/_{81}\, M}{(d - x)^2},$$

woraus resultiert $x = 9(d - x)$, so daß $x = {}^9/_{10}\, d = \underline{0{,}9\, d}$ gefunden wird.

Der Gravitationsnullpunkt der beiden Felder der Erde und des Mondes liegt auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Abstand $x = 0{,}9\, d$ vom Erdmittelpunkt aus gemessen.

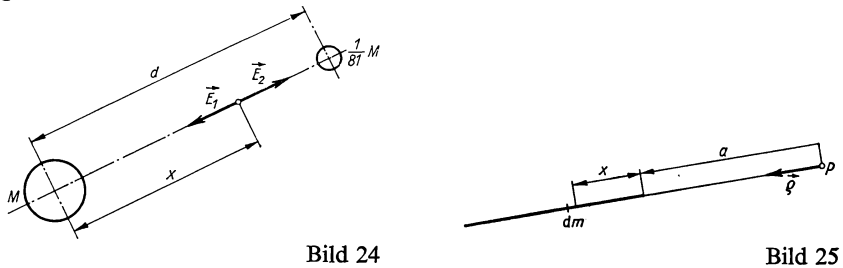


Bild 24 Bild 25

45. Berechnen Sie Potential und Stärke des Gravitationsfeldes eines Stabes der Masse m und der Länge l an einem Ort P, der im Abstand a vom Stabende in der Richtung des Stabes gelegen ist (Bild 25).

Lösung

Der Anteil des Massenelements dm des Stabes am Gesamtpotential im Punkt P ist

$$\mathrm{d}V = -\gamma \frac{\mathrm{d}m}{x+a} = -\gamma \frac{m}{l} \frac{\mathrm{d}x}{x+a},$$

weil dm = (m/l) dx ist. Durch Integration über den ganzen Stab erhalten wir das Potential

$$V = -\gamma \frac{m}{l} \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -\gamma \frac{m}{l} [\ln(x+a)]_0^l = \underline{-\gamma \frac{m}{l} \ln \frac{l+a}{a}}.$$

Die Gravitationsfeldstärke ermitteln wir aus der Beziehung $E = -$ grad V. In unserem Beispiel heißt das, daß wir schreiben können

$$\vec{E} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} \vec{\varrho} = -\gamma \frac{m}{l} \frac{a}{l+a} \frac{a-l-a}{a^2} \vec{\varrho} = \underline{\gamma \frac{m}{a(l+a)}} \vec{\varrho},$$

wobei $\vec{\varrho}$ den Einheitsvektor in der in Bild 25 angegebenen Richtung darstellt.

46. Errechnen Sie Potential und Stärke eines Gravitationsfeldes, das von einer Kreisplatte (Masse m, Radius r) ausgeht, für einen Ort P auf der zur Platte senkrecht stehenden Mittelpunktsachse im Abstand a von der Platte. Die Dicke der Platte werde vernachlässigt.

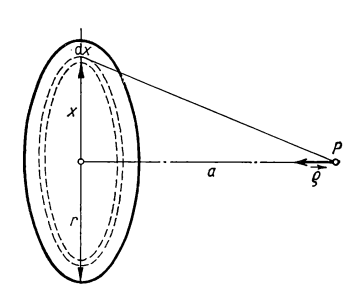


Bild 26

Lösung

Der Anteil eines Massenelements dm der Platte, das als kreisringförmiges Element der Breite dx gewählt wurde (Bild 26), an dem gesamten im Punkt P auftretenden Potential ist

$$\mathrm{d}V = -\gamma \frac{\mathrm{d}m}{s} = -\gamma \frac{\frac{m}{\pi r^2} 2\pi x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Durch Integration über die ganze Platte erhalten wir das wirkende Gesamtpotential zu

$$V = -\gamma \frac{2m}{r^2} \int_0^r \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\gamma \frac{2m}{r^2} [\sqrt{x^2+a^2}]_0^r =$$

$$= \underline{-\gamma \frac{2m}{r^2} [\sqrt{r^2+a^2} - a^2]}.$$

Für die Gravitationsfeldstärke im Punkt P kann dann geschrieben werden

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\,\vec{\varrho} = -\gamma\,\frac{2m}{r^2}\left[\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} - 1\right]\vec{\varrho} =$$

$$= \gamma\,\frac{2m}{r^2}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\right]\vec{\varrho}.$$

47. Welche Horizontalgeschwindigkeit v muß man irgendeinem Körper in einer Höhe $h = 500$ km über der Erdoberfläche vermitteln, damit er als künstlicher Erdsatellit auf einer Kreisbahn die Erde umfliegt? Der Erdradius beträgt 6370 km (Bild 27).

Lösung

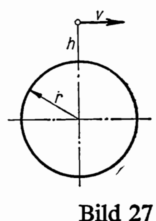


Bild 27

Die Geschwindigkeit v muß der Bedingung genügen, daß die Fliehkraft, die auf einer Kreisbahn eines fliegenden Körpers angreift, gleich der in der vorgegebenen Höhe wirksamen Gravitationskraft ist. Es muß also gelten

$$m\,\frac{v^2}{r+h} = \gamma\,\frac{mM}{(r+h)^2} \qquad (1)$$

(γ Gravitationskonstante, M Erdmasse).
Zwischen der Gravitationskraft F_0, die auf den gegebenen Körper an der Erdoberfläche wirken würde, und der Gravitationskraft F, die auf den gleichen Körper in der Höhe h über der Erdoberfläche wirkt, besteht die Beziehung

$$F = F_0\,\frac{r^2}{(r+h)^2},$$

denn

$$F = \gamma\,\frac{mM}{(r+h)^2}\,; \quad F_0 = \gamma\,\frac{mM}{r^2}.$$

Da $F_0 = mg$ ist mit $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, resultiert aus Gl. (1)

$$\frac{v^2}{r+h} = g\,\frac{r^2}{(r+h)^2},$$

so daß die gesuchte Geschwindigkeit gefunden wird zu

$$v = \sqrt{g\,\frac{r^2}{r+h}} = r\sqrt{\frac{g}{r+h}} = 6370\cdot 10^3\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{6870\cdot 10^3\ \mathrm{m}}} = 7600\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

48. Berechnen Sie die kinetische Energie W_k eines Körpers der Masse m, der sich im freien Fall aus großer Höhe H der Erde nähert, im Moment seines Auftreffens auf die Erdoberfläche. Der Erdradius werde mit r angegeben. Wie groß wäre die Energie für den Fall $H \gg r$? Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.

Lösung

Wir wenden das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. In der Ausgangshöhe H über der Erdoberfläche, von wo aus sich der Körper der Erde im freien Fall nähert, hat er nur potentielle Energie, die durch die Beziehung gegeben ist:

$$W_p = -\gamma m M \left(\frac{1}{H+r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\gamma m M}{r(H+r)} H = mgr \frac{H}{r+H},$$

denn es ist $g = \gamma \dfrac{M}{r^2}$.

Im Moment des Auftreffens auf die Erdoberfläche hat der Körper nur kinetische Energie, für die sich aus dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie ergibt:

$$\underline{W_k = mgr \frac{H}{r+H}}.$$

Und für den Fall $H \gg r$ finden wir

$$\underline{W_k = mgr}.$$

49. Ein Körper werde von der Erdoberfläche aus mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht aufwärts geworfen. Welche Höhe erreicht er, und wie groß müßte die Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein, damit der Körper nicht auf die Erde zurückfällt? Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.

Lösung

Wir beziehen uns wiederum auf das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie. Die Gesamtenergie des Körpers ist im Moment seines Starts allein durch den Wert seiner kinetischen Energie bestimmt, da die potentielle an der Erdoberfläche gleich Null ist. In der Maximalhöhe H, die der Körper erreicht, ist die Gesamtenergie andererseits ausschließlich durch seine potentielle Energie vorhanden. Beziehen wir diese potentielle Energie auf die Erdoberfläche, so können wir schreiben:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -\gamma m M \left(\frac{1}{r+H} - \frac{1}{r}\right).$$

Da $g = \gamma \dfrac{M}{r^2}$ ist, kann die vorhergegangene Gleichung auch in die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgr \frac{H}{r+H}.$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Maximalhöhe H der Wert

$$\underline{H = \frac{v_0^2}{2gr - v_0^2} r}.$$

Im Falle, daß wir nur ein einziges Gravitationsfeld, nämlich das irdische, vorliegen haben, lautet die Bedingung dafür, daß der Körper nicht wieder zur Erde zurückfällt, daß er also bis in die Höhe $H = \infty$ fliegt, wie folgt:

$$2gr - v_0^2 = 0,$$

so daß die Startgeschwindigkeit mindestens einen Wert von

$$v_0 = \sqrt{2gr} = \underline{11\,200 \text{ m s}^{-1}}$$

haben muß, die sog. 2. kosmische Geschwindigkeit.

50. Mit welcher Mindestgeschwindigkeit müßte eine Rakete von der Erde aus gestartet werden, damit sie auf den Mond trifft? Wie groß ist in diesem Fall die Aufschlaggeschwindigkeit auf der Mondoberfläche? Der Abstand der Mittelpunkte der Erde und des Mondes beträgt im Mittel $d = 380\,000$ km, der Erdradius ist $r_E = 6370$ km, der Mondradius $r_M = {}^1/_4\, r_E$. Die Mondmasse beträgt ${}^1/_{81}$ der Masse der Erde.

Lösung

Zur Lösung dieses Problems wenden wir wieder das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, da wir den Luftwiderstand in der Erdatmosphäre unberücksichtigt lassen. Da man mit hinreichender Genauigkeit Mond und Erde als Kugelkörper ansehen kann, sind ihre jeweiligen Gravitationsfelder ebensogroß wie die von Massenpunkten mit der Erd- bzw. Mondmasse, die im Erd- bzw. Mondmittelpunkt liegen. Bei der Bewegung der Rakete von der Erde zum Mond wird das Gravitationsfeld der Erde eine Bremswirkung ausüben, während das Gravitationsfeld des Mondes im Gegensatz dazu eine beschleunigende Wirkung ausübt. Nach dem Resultat des Beispiels 44 (Bild 24) wird das Gravitationsfeld der Erde bis zu jenem Punkt hin überwiegen, der vom Erdmittelpunkt die Strecke $x = {}^9/_{10}\, d$ entfernt liegt, während hinter diesem Punkt dann das Gravitationsfeld des Mondes überwiegt. Es reicht also aus, der Rakete eine solche Geschwindigkeit zu erteilen, die es ihr erlaubt, bis zu dem Punkt zu gelangen, der vom Erdmittelpunkt den Abstand x hat. Von da an wird sie dann unter dem Einfluß des überwiegenden Mond-Gravitationsfeldes mit einer beschleunigten Bewegung auf den Mond zu fallen. Es kann daher geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \gamma\,\frac{mM_E}{r_E} - \gamma\,\frac{mM_M}{d - r_E} = -\gamma\,\frac{mM_E}{0{,}9d} - \gamma\,\frac{mM_M}{0{,}1d},$$

wobei wir auf der linken Seite der Gleichung die Summe von kinetischer und potentieller Energie der Rakete an der Erdoberfläche und auf der rechten Seite die Gesamtenergie der Rakete im Punkt $x = 0{,}9\, d$ vom Erdmittelpunkt finden. Diese Gesamtenergie besteht hier wieder nur aus der potentiellen, da die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie an diesem Punkt gleich Null angesetzt werden. Für die gesuchte minimale Abschußgeschwindigkeit der Rakete von der Erdoberfläche kann also geschrieben

werden

$$v^2 = 2\left[\gamma M_E\left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{0{,}9d} + \frac{1}{81(d-r_E)} - \frac{1}{81\cdot 0{,}1d}\right)\right] =$$

$$= 2gr_E\left(1 - \frac{r_E}{0{,}9d} + \frac{r_E}{81(d-r_E)} - \frac{r_E}{81\cdot 0{,}1d}\right),$$

so daß gefunden wird

$$v = \sqrt{2gr_E\cdot 0{,}98} = 11{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}}\cdot 0{,}99 = \underline{11{,}09\,\mathrm{km\,s^{-1}}}.$$

Für die Geschwindigkeit v^*, mit der die Rakete auf dem Mond auftrifft, kann analog geschrieben werden

$$-\gamma\frac{mM_E}{0{,}9d} - \gamma\frac{mM_M}{0{,}1d} = \frac{1}{2}mv^{*2} - \gamma\frac{mM_M}{r_M} - \gamma\frac{mM_E}{d-r_M},$$

da wir auf der linken Seite der Gleichung den Wert der Gesamtenergie der Rakete im Punkt mit dem Abstand $x = 0{,}9\,d$ vom Erdmittelpunkt und auf der rechten wiederum die Gesamtenergie der Rakete beim Auftreffen auf die Mondoberfläche dargestellt haben. Nach einer Umformung folgt zunächst

$$v^{*2} = 2\left[\gamma\frac{M_M}{r_M}\left(1 - \frac{81r_M}{0{,}9d} - \frac{r_M}{0{,}1d} + \frac{81r_M}{d-r_M}\right)\right],$$

und mit den Massen bzw. Radien können wir schreiben

$$v^{*2} = 2\left[\frac{1}{4\cdot 81}\gamma\frac{M_E}{r_E}\left(1 - \frac{81r_E}{4\cdot 0{,}9d} - \frac{r_E}{4\cdot 0{,}1d} + \frac{81r_E}{4(d-\frac{1}{4}r_E)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 81}2gr_E\left[1 - \frac{81r_E}{4\cdot 0{,}9d} - \frac{r_E}{4\cdot 0{,}1d} + \frac{81r_E}{4(d-\frac{1}{4}r_E)}\right],$$

so daß wir schließlich für die Auftreffgeschwindigkeit finden

$$v^* = \frac{1}{18}\sqrt{2gr_E\cdot 0{,}91} = \frac{1}{18}\cdot 11{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}}\cdot 0{,}95 = \underline{0{,}591\,\mathrm{km\,s^{-1}}}.$$

A Aufgaben

33. An zwei gleich langen Ketten AC und BC (Bild 28), die in den Punkten A und B befestigt sind, hängt ein Körper K. Wie groß muß die Länge l der Ketten sein, wenn die Kraft, durch die eine Kette gespannt wird, maximal die Größe T_0 haben darf und der Abstand $AB = 2a$ gegeben ist?
34. An drei symmetrisch angeordneten Seilen ist ein Körper K aufgehängt (Bild 29). Wieviel wiegt er, wenn die Länge eines jeden Seiles $l = 1$ m ist, die Befesti-

gungspunkte ein gleichseitiges Δ ABC mit der Seite $a = 1$ m bilden und wenn die einzelnen Seile jeweils durch die Kraft $F = 24{,}55$ N gespannt werden?

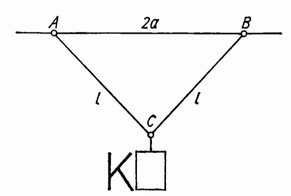


Bild 28

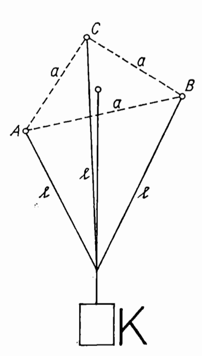


Bild 29

35. Ein Körper wird durch die Wirkung der Kraft $F = 0{,}02$ N in Bewegung versetzt und legt während der ersten vier Sekunden seiner Bewegung eine Strecke von 3,2 m Länge zurück. Wie groß ist seine Masse, und welche Geschwindigkeit wird er am Ende der fünften Sekunde seiner Bewegung haben?
36. Eine Granate der Masse $m = 5$ kg verläßt ihren Lauf mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1200$ m s^{-1}. Wie groß war die im Lauf wirkende Kraft unter der Annahme, daß die Bewegung der Granate im Lauf gleichförmig beschleunigt verlief und 0,01 s dauerte? Welche Arbeit wurde dabei von der beschleunigenden Kraft verrichtet?
37. Eine Granate der Masse $m = 24$ kg verläßt ihren Lauf mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 500$ m s^{-1}. Der Lauf sei 2 m lang. Wie groß ist der Durchschnittswert der im Lauf auf die Granate wirkenden Kraft?
38. Stellen Sie fest, in welchen Punkten der Erdoberfläche Zentrifugalkraft und Coriolis-Kraft unter gleichartigen Bedingungen ihren maximalen und minimalen Wert aufweisen.
39. Ein Eisenbahnwaggon bewegt sich auf einer horizontalen geraden Strecke. Er wird mit einer Kraft gebremst, die genau ein Zehntel seines Gewichts ist. Bestimmen Sie die Zeit, die vom Beginn der Bremsung bis zum Stillstand vergeht, sowie die Strecke, die er dabei zurücklegt, wenn der Waggon im Moment des Bremseinsatzes eine Geschwindigkeit von 72 km h^{-1} innehatte.
40. Wie groß ist das scheinbare Gewicht einer 75 kg schweren Person in einem Aufzug, der sich
    a) mit einer Verzögerung von 0,2 m s^{-2} aufwärts und mit einer Beschleunigung von 0,2 m s^{-2} abwärts bewegt,
    b) mit einer Beschleunigung von 0,15 m s^{-2} aufwärts und mit einer Verzögerung von 0,15 m s^{-2} abwärts bewegt?
41. Zwei gleich große kugelförmige Körper werden aus verschiedenen Werkstoffen mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 gefertigt. Beide Kugeln fallen in Luft. Unter der Voraussetzung, daß der Luftwiderstand proportional dem Geschwindigkeitsquadrat ist, soll ermittelt werden, in welchem Verhältnis die von beiden Kugeln erreichten Maximalgeschwindigkeiten stehen.
42. Eine Kugel der Masse m dringt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in ein hemmendes Medium ein, dessen Widerstand F proportional zur Geschwindigkeit eines Massenpunktes wächst, d. h.,

$F = -kv$. Welchen Weg legt die Kugel bis zum Stillstand zurück, wenn außer dem Widerstand des hemmenden Mediums keine andere Kraft auf sie wirkt?

43. Ein Stein der Masse $m = 3$ kg hängt an einem Faden der Länge $l = 1$ m und führt in vertikaler Ebene eine Bewegung auf einer Kreisbahn aus. Es ist die kleinste Winkelgeschwindigkeit für den Umlauf des Steins auf der Kreisbahn zu finden, bei der der Faden reißen würde, wenn dazu eine Kraft von $F = 88{,}3$ N notwendig ist.
44. Ein Ball der Masse $m = 0{,}1$ kg wurde durch Anstoß so in Bewegung versetzt, daß seine Geschwindigkeit $v = 10$ m s^{-1} beträgt. Welche Kraft wirkte auf ihn, wenn die Dauer des Kraftstoßes $t = 0{,}01$ s betrug?
45. Der Motor eines Autos mit der Gesamtmasse $m = 960$ kg entwickelt eine Zugkraft von 1600 N. In welcher Zeit kann der Wagen eine Geschwindigkeit von 54 km h^{-1} erreichen?
46. Ein Waggon mit der Masse $m = 16000$ kg bewegt sich geradlinig mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m s^{-1}. Wie groß ist der Mittelwert der auf den Waggon wirkenden Reibungskraft, wenn dieser dadurch innerhalb einer Minute zum Halten kommt?
47. Welche Arbeit verrichtet ein Pferd, das einen Wagen von 1500 kg Masse mit konstanter Geschwindigkeit 600 m weit zieht und dabei eine Reibung von 0,8 % des Wagengewichts überwindet?
48. Eine stählerne Spiralfeder der Länge $l_0 = 0{,}8$ m wird unter Einwirkung der Kraft $F_1 = 2$ kp um die Länge $x_1 = 0{,}05$ m gedehnt. Welche Arbeit wird bei einer Dehnung der Spiralfeder auf das Zweifache ihrer ursprünglichen Länge benötigt, wenn die Kraft, die diese Arbeit verrichtet, proportional der Ausdehnung der Feder ist?
49. Ein hölzerner Zylinder ist zu $^2/_3$ seiner Länge in Wasser untergetaucht. Welche Arbeit muß zum Herausziehen des Zylinders aus dem Wasser verrichtet werden, wenn sein Radius $r = 0{,}1$ m und seine Länge $h = 0{,}6$ m ist?
50. Ein Geschoß der Masse $m = 0{,}02$ kg erreicht mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 400$ m s^{-1} einen Baum. Wie tief dringt es in ihn ein, wenn der Widerstand des Holzes $F = 1000$ kp beträgt?
51. Ein Körper der Masse $m = 100$ kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20$ km h^{-1}. Er soll auf einem 20 m langen Weg zum Stillstand gebracht werden. Mit welcher konstanten Kraft muß seine Bewegung abgebremst werden?
52. Ein mit der Geschwindigkeit $v_1 = 60$ km h^{-1} fahrender Zug kann durch Anlegen der Bremsen auf einer Strecke $s_1 = 400$ m zum Halten gebracht werden. Welche Geschwindigkeit dürfte der Zug haben, wenn er durch gleichmäßiges Bremsen auf einer Strecke $s_2 = 100$ m zum Halten gebracht werden soll?
53. Ein Körper der Masse $m = 0{,}8$ kg wird senkrecht nach oben geworfen. In der Höhe $h = 10$ m hat er noch eine kinetische Energie von $W_k = 200$ Nm. Welche Maximalhöhe kann der Körper erreichen?
54. Wie groß ist die maximale Leistung eines Wasserrades, dessen Antrieb durch Wasser erfolgt, das aus einer Höhe $h = 10$ m herabfällt, wenn in einer Sekunde jeweils 150 l Wasser zur Verfügung stehen?
55. Berechnen Sie die Leistung des Motors eines LKW, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = 30$ km h^{-1} auf einer Straße mit 5 % Steigung bewegt, wenn die Gesamtmasse des Fahrzeuges $m = 5000$ kg beträgt. Der Reibungswiderstand wird vernachlässigt.
56. Ein Stein A befindet sich auf dem höchsten Punkt eines halbkugelförmigen,

glatten Körpers mit dem Radius r (Bild 30). Wir verleihen ihm in horizontaler Richtung eine Anfangsgeschwindigkeit v_0. Es ist zu ermitteln, von welchem Punkt aus der Stein die Oberfläche

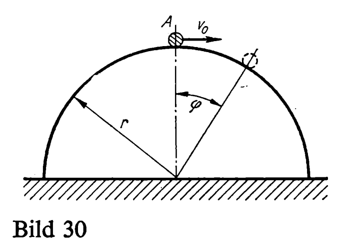


Bild 30

seiner halbkugeligen Unterlage verläßt. Bei welchem Wert der Anfangsgeschwindigkeit v_0 verläßt der Stein seine Unterlage bereits im Auflagepunkt? Der Reibungswiderstand wird vernachlässigt.

57. Wie groß ist der Unterschied der Gravitationskraft, mit der die Erde auf einen Körper wirkt, der einmal in einer Höhe $h = 6400$ m über NN, ein anderes Mal direkt auf NN liegt? Der Erdradius ist $r = 6370$ km.
58. Berechnen Sie Potential und Stärke des Gravitationsfeldes eines Drahtes der Masse m, der in die Form eines Kreises mit dem Radius r gebogen wurde, im Punkt P auf der Kreisachse im Abstand s von seinem Mittelpunkt (Bild 31).
59. Ermitteln Sie die Beschleunigung, mit der ein Körper auf die Mondoberfläche fallen würde, wenn wir voraussetzen,

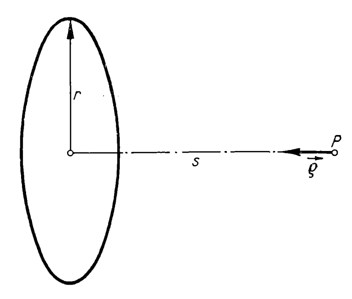


Bild 31

daß auf den Körper nur das Gravitationsfeld des Mondes wirkt, und wenn bekannt ist, daß für Masse und Radius des Mondes die Werte $M_M = {}^1/_{81}\, M_E$ und $r_M = {}^1/_4\, r_E$ gelten (M_E Erdmasse, r_E Erdradius).

60. Berechnen Sie die notwendige Anfangsgeschwindigkeit v_0, die man einem Körper vermitteln muß, der sich senkrecht aufwärts bis zu einer Höhe vom Wert des Erdradius (6370 km) über die Erdoberfläche bewegen soll. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

1.3. Dynamik des Systems von Massenpunkten und des starren Körpers

Unter dem **Schwerpunkt** des Systems aus zwei Massenpunkten verstehen wir denjenigen Punkt auf ihrer Verbindungslinie, der diese im umgekehrten Verhältnis der Massen beider Massenpunkte teilt.

Den gemeinsamen Schwerpunkt dreier Massenpunkte definieren wir als den Punkt auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes der beiden ersten Massenpunkte und des dritten, der diese Verbindungslinie wieder im umgekehrten Verhältnis der Massensumme der ersten beiden Punkte und des dritten teilt.

Ähnlich können wir die Definition des Schwerpunktes auf ein System von beliebig vielen Massenpunkten erweitern.
Der Ortsvektor des Schwerpunktes eines Systems von Massenpunkten $\vec{r}^*$ bezüglich eines bestimmten Bezugspunktes ist durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

($\vec{r}_i$ Ortsvektor des i-ten Punktes des Systems bezüglich desselben Bezugspunktes, m_i Masse des i-ten Punktes).
Der Zusammenhang zwischen den Schwerpunktkoordinaten des Systems von Massenpunkten und den zugehörigen Massenpunktkoordinaten des Systems ist analog durch die Beziehungen

$$x^* = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y^* = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z^* = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

gegeben.
Den Ortsvektor bzw. die Schwerpunktkoordinaten eines homogen mit Masse erfüllten Körpers bestimmen wir durch Volumenintegration aus

$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r}\, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \varrho \vec{r}\, \mathrm{d}\tau}{\int \varrho\, \mathrm{d}\tau}$$

bzw.

$$x^* = \frac{\int \varrho x\, \mathrm{d}\tau}{\int \varrho\, \mathrm{d}\tau}; \quad y^* = \frac{\int \varrho y\, \mathrm{d}\tau}{\int \varrho\, \mathrm{d}\tau}; \quad z^* = \frac{\int \varrho z\, \mathrm{d}\tau}{\int \varrho\, \mathrm{d}\tau},$$

wobei ϱ die Dichte, die an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden sein kann, und $\mathrm{d}\tau$ das Volumenelement ist.
Das **Drehmoment** $\vec{M}$ hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes O definieren wir durch die Beziehung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

($\vec{r}$ Ortsvektor des Angriffspunktes der Kraft bezogen auf den Punkt O).
Analog definieren wir den **Drehimpuls** $\vec{L}$ eines Massenpunktes hinsichtlich des Bezugspunktes O durch die Beziehung

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

($\vec{r}$ Ortsvektor des Massenpunktes bezüglich des Punktes O).

Der Zusammenhang zwischen dem Moment der auf einen Massenpunkt – hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes – wirkenden Kraft und dem Drehimpuls des Massenpunktes – bezüglich desselben Bezugspunktes – ist durch die Beziehung gegeben:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} .$$

Es kann nachgewiesen werden, daß die Projektion des Drehmoments bezüglich eines Punktes auf einer bestimmten Geraden – und in deren Richtung – vom Ort des auf der Geraden gewählten Punktes unabhängig ist. Eine solche Projektion des Drehmoments in Richtung einer bestimmten Geraden bezeichnen wir als *Drehmoment bezüglich einer Geraden* (Achse).

Als ein **Kräftepaar** bezeichnen wir zwei gleich große Kräfte entgegengesetzter Richtung, die an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen und deren Verbindungslinie nicht in die Kräftegerade derjenigen Kräfte fällt, die das Paar bilden. Das Moment des Kräftepaares wird durch das Produkt des Wertes der das Paar bildenden Kräfte und dem Abstand der Kräftegeraden gebildet.

Die Bewegung eines Systems von Massenpunkten bzw. eines Körpers wird durch die beiden Impulssätze beschrieben.

Der **1. Impulssatz** besagt:
Die Summe aller Außenkräfte, die auf die einzelnen Punkte eines Systems wirken, ist gleich der Ableitung der gesamten Bewegungsgröße des Systems nach der Zeit.
Mathematisch kann er durch die Gleichung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

ausgedrückt werden, wobei $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ und $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$ ist.

Dem ersten Impulssatz gleichbedeutend ist der *Satz von der Bewegung des Schwerpunktes*. Er besagt:

Unter der Einwirkung äußerer Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bzw. eines Körpers so, als ob die Gesamtmasse des Systems bzw. des Körpers im Schwerpunkt konzentriert wäre und alle Kräfte im Schwerpunkt angriffen.

Mathematisch kann dieser Satz durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$m\vec{a}^* = \vec{F}$$

(m Gesamtmasse des Massenpunktsystems bzw. des Körpers, $\vec{a}^*$ Schwerpunktbeschleunigung, $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ Vektorsumme aller auf das Massenpunktsystem bzw. auf den Körper wirkenden Außenkräfte). Wenn die Summe der äußeren Kräfte gleich

Null ist oder wenn äußere Kräfte nicht vorhanden sind (isoliertes, abgeschlossenes System), verändert sich die Schwerpunktlage nicht. Dieser Sachverhalt findet seinen Ausdruck im Gesetz von der Erhaltung des Schwerpunktes eines abgeschlossenen Systems.

Der **2. Impulssatz** besagt:

Die Summe der Momente aller äußeren Kräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte eines Systems hinsichtlich eines bestimmten Bezugspunktes wirken, ist gleich der Ableitung des Gesamtdrehimpulses des Systems (hinsichtlich desselben Bezugspunktes) nach der Zeit.

Mathematisch kann er durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ und $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ ist.

Für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten, d. h., für ein System, auf das nur innere Kräfte wirken (äußere sind nicht vorhanden), ergeben sich aus dem 1. und 2. Impulssatz zwei Erhaltungsgesetze: das Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße und das Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses.

Das **Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße** besagt:

Die Gesamtbewegungsgröße eines abgeschlossenen Systems ist konstant, d. h.

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Das **Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses** besagt:

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant, d. h.

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Im **Gleichgewicht** befindet sich ein Körper dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Summe aller auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte ist gleich Null, d. h., $\sum \vec{F}_i = 0$;
2. Die Summe der Momente aller äußeren Kräfte hinsichtlich eines beliebigen Punktes ist gleich Null, d. h., $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$.

Wenn irgendein Körper sich um eine feste Achse dreht, nimmt seine Bewegungsgleichung die Form an:

$$M = J\alpha,$$

wobei α die Winkelbeschleunigung, M die Projektionsgröße des Gesamtmoments der äußeren Kräfte in Richtung der Drehachse, d. h. der Betrag des Gesamtmoments

der äußeren Kräfte hinsichtlich der Drehachse, und J das sog. **Massenträgheitsmoment** des Körpers bezüglich der Drehachse ist, das durch die Beziehung

$$J = \sum m_i r_i^2$$

definiert wird (r_i Abstand des Massenpunktes m_i von der Drehachse). Bei Körpern, die homogen mit Masse erfüllt sind, gilt dafür

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int \varrho r^2 \, \mathrm{d}\tau,$$

wobei die Integration über das gesamte Volumen des betreffenden Körpers ausgeführt werden muß.

Die Berechnung der Trägheitsmomente von Körpern in bezug auf beliebige Achsen wird durch einige Lehrsätze erleichtert, insbesondere durch den **Satz von Steiner**, der besagt:

Das Massenträgheitsmoment J eines Körpers, bezogen auf eine beliebige Drehachse, ist gleich seinem Massenträgheitsmoment J_S, bezogen auf die parallele Schwerpunktachse, vermehrt um das Produkt aus Masse und dem Quadrat des Abstandes beider Achsen.

Mathematisch kann man den Satz durch die Beziehung ausdrücken:

$$J = J_S + ma^2$$

(m Gesamtmasse, a Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse).

Das Trägheitsmoment eines Körpers hinsichtlich irgendeiner beliebigen Achse kann allgemein durch die Gleichung

$$J = (\vec{T}\vec{\varrho})\,\vec{\varrho}$$

ausgedrückt werden, wobei $\vec{T}$ der Tensor der Bewegungsgröße eines Körpers in einem bestimmten Punkt einer Geraden und $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der Geraden, hinsichtlich der wir das Trägheitsmoment suchen, ist.

Bei spezieller Wahl eines geeigneten Koordinatensystems, wenn die Koordinatenachsen in Richtung der Achsen eines Trägheitsellipsoids fallen (Hauptträgheitsachsen), kann der Tensor der Bewegungsgröße eines Körpers, z. B. im Schwerpunkt, durch folgende einfache Beziehung ausgedrückt werden:

$$\vec{T}_S = J_{S1}\vec{i}\vec{i} + J_{S2}\vec{j}\vec{j} + J_{S3}\vec{k}\vec{k} \qquad (1)$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Trägheitsmomente des Körpers bezüglich seiner Hauptträgheitsachsen: Hauptträgheitsmomente). Die Hauptträgheitsachsen sind dadurch gekennzeichnet, daß für eine von ihnen das Trägheitsmoment ein Maximum, für eine andere ein Minimum ist und daß alle drei Achsen aufeinander senkrecht stehen.

Unter Berücksichtigung von Gl. (1) kann man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse, die mit den Hauptträgheitsachsen die Winkel α, β, γ einschließt, durch folgende Beziehung ausdrücken:

$$J = (\vec{T}_S \vec{\varrho})\,\vec{\varrho} = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma .$$

Die allgemeine Bewegung eines Körpers kann als die Summe der Translationsbewegung seines Schwerpunktes und der Rotation des Körpers um die durch seinen Schwerpunkt gehende Achse angesehen werden.
Die *kinetische Energie eines Körpers*, der eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse ausführt, errechnet man aus

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 ,$$

wobei J das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der gewählten Drehachse ist.
Die *Arbeit*, welche die äußeren Kräfte bei der Drehung eines Körpers um einen bestimmten Winkel φ verrichten, ist durch die Beziehung

$$W = M\varphi$$

gegeben, wenn der Wert des Kräftemoments M bezüglich der Drehachse konstant ist. Diese Arbeit ist gleich der Zunahme der kinetischen Energie der Rotation des Körpers in diesem Drehabschnitt.
Allgemein ist die gesamte kinetische Energie eines Körpers als Summe der kinetischen Energie der Translation des Schwerpunktes mit der Gesamtmasse m des Körpers und seiner kinetischen Energie der Rotation um eine Schwerpunktachse gegeben. Es ergibt sich so

$$W_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 .$$

Auch bei dieser allgemeinen Bewegung eines Körpers gilt das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie, *solange es tatsächlich nur zu Umwandlungen der einen Form mechanischer Energie in eine andere kommt* und Umwandlungen in nichtmechanische Energieformen (innere, elektrische usw.) ausgeschlossen sind.
Jeder Körper stellt ein **physikalisches Pendel** dar, wenn er so befestigt ist, daß er sich unter der Wirkung seines Eigengewichts um eine nichtvertikale Achse drehen kann, die nicht durch seinen Schwerpunkt verläuft.
Wenn es sich um ausreichend kleine Auslenkungen φ aus der Gleichgewichtslage handelt, kann die Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels in der Form ge-

schrieben werden

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mga}{J}\varphi$$

(m Gesamtmasse des Pendels, a Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse, J Trägheitsmoment des Pendels bezüglich der Drehachse).
Als Lösung dieser Differentialgleichung finden wir den Ausdruck, der die Zeitabhängigkeit der Auslenkung φ angibt, in der Form

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$\left(\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}\right.$ Kreisfrequenz, φ_0 Amplitude, α Phasenkonstante$\left.\right)$.
Die Periodendauer eines physikalischen Pendels berechnen wir aus

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\,.$$

Für die sog. *reduzierte Pendellänge* eines physikalischen Pendels gilt die Beziehung

$$l = \frac{J}{ma}\,.$$

Sie bedeutet den Abstand zweier bezüglich des Pendelschwerpunkts unsymmetrisch liegender Achsen, um die das physikalische Pendel mit gleicher Periode schwingt.
Wenn sich ein Körper um eine willkürlich durch ihn gelegte Achse dreht, dann ändert sich infolge der wirkenden Zentrifugalkräfte die Trägheit seiner Massenelemente. Dreht sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch seinen Schwerpunkt verlaufende Achse, dann hat das Gesamtmoment der Zentrifugalkräfte bezüglich aller Punkte auf der Achse, also auch bezüglich des Körperschwerpunkts, den gleichen Wert, der durch die Beziehung

$$M_{S0} = \omega^2 U_S$$

gegeben ist, wobei U_S der Wert des sog. *Auslenkungsmoments* des Körpers hinsichtlich der gegebenen Achse ist. Allgemein wird das Auslenkungsmoment bezüglich der Achse durch die Beziehung

$$U = (\vec{T}\,\vec{\varrho}) \times \vec{\varrho}$$

bestimmt ($\vec{T}$ Tensor der Bewegungsgröße des Körpers im entsprechenden Punkt auf der Achse, $\vec{\varrho}$ Einheitsvektor, der in die Richtung der Achse fällt).
Infolge dieses Einflusses ist die Wirkung der Zentrifugalkräfte analog zur Wirkung

des Kräftepaares, das bestrebt ist, die Körperachse aus ihrer momentanen Lage auszulenken. Wenn der rotierende Körper mechanisch auf einer in Lagern fixierten Achse liegt, entstehen dadurch in den Lagern Drücke, durch die die Lager belastet werden.
Nur in den Fällen, da eine der Hauptträgheitsachsen Rotationsachse ist, befinden sich die Zentrifugalkräfte im Gleichgewicht miteinander, und daher ist ihr Einfluß auf die Lage der Achse, gegebenenfalls auf die sie führenden Lager, gleich Null.

B Beispiele

51. Aus einer homogenen kreisförmigen Platte mit dem Radius r wird ein Kreis mit dem halben Radius der kreisförmigen Platte ausgeschnitten (Bild 32). Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunkts des auf diese Weise entstandenen Körpers.

Lösung

Die Lage des Schwerpunkts des angegebenen Gebildes läßt sich leicht bestimmen, indem wir das ganze Gebilde in zwei Teile zerlegen, und zwar in den Kreis mit dem Radius $r/2$ mit dem Zentrum in S_1, wo sich auch der Schwerpunkt dieses Teils befindet, und dem verbleibenden Teil, der aus Symmetriegründen seinen Schwerpunkt in S_0 hat, d. h. im Zentrum des Ursprungskreises. Für die Lage des resultierenden Schwerpunktes S gilt

$$\left(\frac{r}{2} - x\right) : x = \left(\pi r^2 - 2\pi \frac{r^2}{4}\right) : \pi \frac{r^2}{4},$$

woraus für das gesuchte x resultiert: $\underline{x = r/6.}$

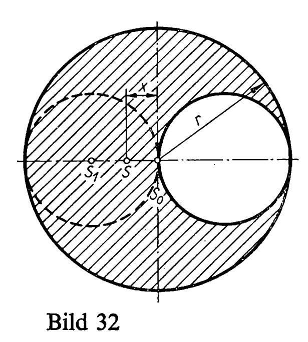


Bild 32

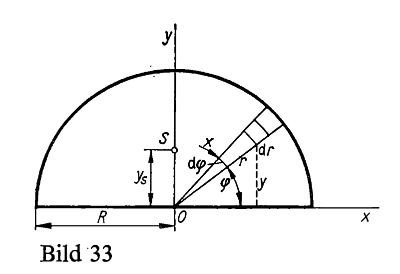


Bild 33

52. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts für einen homogenen Körper, der die Form einer Halbkreisplatte mit zu vernachlässigender Dicke und dem Radius R hat.

Lösung

Bei der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems (Bild 33) ist aus Symmetriegründen $x_S = 0$. Für y_S gilt

$$y_S = \frac{\int y \, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int\limits_0^R \int\limits_0^\pi r \sin\varphi \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \frac{2m}{\pi R^2}}{m},$$

$$y_S = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = \underline{\frac{4R}{3\pi}},$$

wobei, wie aus dem Bild hervorgeht, für die Größen y und $\mathrm{d}m$ geschrieben wurde $y = r \sin\varphi$ und

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{2}} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r.$$

53. Ermitteln Sie den Schwerpunkt eines homogenen Kreiskegels der Höhe h.

Lösung

Wenn wir den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Kegelspitze legen und die y-Achse in Richtung der Kegelhöhe annehmen (Bild 34), dann wird deutlich, daß bei Wahrung der Symmetrie $x_S = z_S = 0$ ist, und für y_S gilt

$$y_S = \frac{\int y \, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\frac{3m}{h^3} \int\limits_0^h y^3 \, \mathrm{d}y}{m} = \frac{3}{h^3} \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{3}{4} h,$$

wenn wir festgelegt haben, daß

$$\mathrm{d}m = \pi x^2 \, \mathrm{d}y \frac{m}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{3m}{r^2 h} \frac{r^2}{h^2} y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{3m}{h^3} y^2 \, \mathrm{d}y;$$

da $x : y = r : h$, folgt $x = \frac{r}{h} y$.

Der Schwerpunkt des Kegels befindet sich somit, von der Spitze aus gemessen, im Abstand $^3/_4$ seiner Höhe auf der Kegelachse.

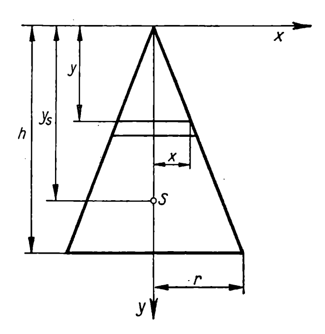


Bild 34

54. Gegeben sei ein System aus drei Massenpunkten: $m_1 = 0{,}05$ kg; $m_2 = 0{,}010$ kg; $m_3 = 0{,}015$ kg. Zur Zeit $t = 0$ befinden sie sich in den Stellungen A_1 (3; 4; 5), A_2 (−2; 4; −6), A_3 (0; 0; 0) in Ruhe, wobei die Koordinaten Maßzahlen in Zentimetern bedeuten sollen. Unter der Wirkung äußerer Kräfte, deren Summe durch einen Vektor $F = 0{,}05$ N in Richtung der x-Achse angegeben ist, setzen sich die Massenpunkte in Bewegung. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunkts des Systems nach Ablauf der Zeit $t = 2$ s.

Lösung

Für die Lage des Schwerpunkts des Systems zur Zeit $t = 0$ ergibt sich

$$x_{S0} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{1}{6}\,\text{cm} = -0{,}17\,\text{cm};$$

$$y_{S0} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\,\text{cm};$$

$$z_{S0} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{35}{30}\,\text{cm} = -1{,}17\,\text{cm}.$$

Durch Anwenden des Satzes von der Schwerpunktbewegung erhalten wir für die Beschleunigung des Schwerpunkts

$$a_{S0} = \frac{F}{\sum m_i} = \frac{0{,}05\,\text{N}}{0{,}03\,\text{kg}} = 1{,}67\,\text{m s}^{-2}.$$

Gemäß der gegebenen Aufgabenstellung fällt die Beschleunigung in die Richtung der x-Achse, so daß für die x-Koordinate des Schwerpunkts geschrieben werden kann

$$x_S = x_{S0} + \frac{1}{2}\,a_St^2 = -0{,}17\,\text{cm} + \frac{1}{2}\cdot 167\,\text{cm s}^{-2}\cdot 4\,\text{s}^2 = \underline{\underline{3{,}338\,\text{m}}}.$$

Für die Koordinaten y_S, z_S gilt offenbar: $\underline{y_S = y_{S0}}$; $\underline{z_S = z_{S0}}$.

55. Im einen Ende eines Bootes, das ruhig auf dem Wasser liegt, befindet sich ein Mensch. Um welche Strecke verändert das Boot seine Lage, wenn der Mensch an das andere Ende des Bootes geht? Das Gewicht des Menschen sei G, das des Bootes G_1, die Länge des Bootes sei $l = 2a$. Der Wasserwiderstand bei der Bewegung des Bootes bleibt unberücksichtigt.

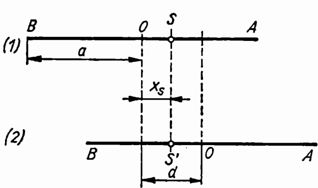


Bild 35

Lösung

Das Boot mit dem an Bord befindlichen Menschen kann als ein abgeschlossenes System angesehen werden. Für dieses gilt das Gesetz von der Erhaltung der Schwerpunktlage. In Bild 35 ist die Lage des Bootes für die beiden Fälle dargestellt: Im Fall (1) befindet sich der Mensch am rechten Ende des Bootes (Stellung A), im Fall (2) in Stellung B. Im ersten Fall liegt der Schwerpunkt des Systems im Abstand x_S, von der Bootsmitte O aus gesehen, in Richtung nach A.

Da die Bootsmitte O zugleich auch der Schwerpunkt des Bootes ist, können wir in Übereinstimmung mit der Schwerpunktdefinition für x_S schreiben

$$x_S = \frac{a\frac{G}{g}}{\frac{G}{g} + \frac{G_1}{g}} = \frac{aG}{G + G_1}\,.$$

Beim Stellungswechsel des Menschen von A nach B verschiebt sich das Boot um die Strecke d so, daß die Lage des neuen Schwerpunkts S' dieselbe ist wie die des ursprünglichen Schwerpunkts S. Aus Bild 35 ist zu ersehen, daß gilt

$$d = 2x_S = 2a\,\frac{G}{G + G_1}\,.$$

56. Bis zu welcher Höhe schlägt ein ballistisches Pendel der Masse $M = 10$ kg aus, wenn es von einem Geschoß der Masse $m = 0{,}1$ kg und der Geschwindigkeit $v = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ getroffen wird?

Lösung

Wenn das Geschoß ein ballistisches Pendel trifft, vereinigt es sich mit ihm, und das Pendel beginnt, sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit v' zu bewegen. Nach dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses für das aus Pendel und Geschoß gebildete abgeschlossene System gilt die Gleichung

$$mv = (M + m)\,v',$$

d. h.,

$$v' = \frac{mv}{M + m}\,.$$

Zur Berechnung der erreichten Höhe h (Bild 36) wenden wir das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, das uns die Beziehung ermöglicht

$$\frac{1}{2}\,(M + m)\,v'^2 = (M + m)\,gh,$$

d. h.,

$$h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(M + m)^2} =$$

$$= \frac{10^{-2}\ \mathrm{kg^2} \cdot 4 \cdot 10^4\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 102\ \mathrm{kg^2}} = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

57. Welche Treibstoffmenge muß eine einfache Einstufenrakete aufnehmen, damit sie nach Verbrennen des gesamten Treibstoffs die erste kosmische Geschwindigkeit erreicht, wenn die Leermasse der Rakete $m_r = 100$ kg beträgt und die relative Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase $v_r = 3000\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ist?

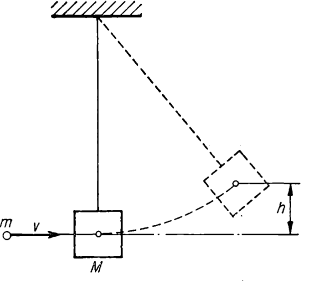


Bild 36

Lösung

Diese Aufgabe werden wir unter Benutzung des Gesetzes von der Erhaltung des Impulses für ein abgeschlossenes System lösen. Die Rakete zusammen mit dem Treibstoff stellt ein solches abgeschlossenes System dar. Zu einem bestimmten Zeitpunkt t, in dem die Rakete hinsichtlich eines gewählten Bezugssystems die Geschwindigkeit v hat, sei die Masse von Rakete plus gegenwärtigem Treibstoffinhalt durch das Symbol m gegekennzeichnet. Der Impuls der Rakete wird zu diesem Zeitpunkt durch die Beziehung

$$\vec{p}_t = m\vec{v}$$

angegeben. Nehmen wir an, daß in der Zeit $\mathrm{d}t$ aus der Rakete Gase mit einer Masse $\mathrm{d}m'$ entweichen, und zwar mit einer Geschwindigkeit $\vec{u}$, die hinsichtlich des gleichen Bezugssystems gemessen wird, auf das wir die Raketengeschwindigkeit beziehen. Dann erhöht sich in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Raketengeschwindigkeit vom Wert $\vec{v}$ auf $\vec{v} + d\vec{v}$. Der Impuls des gesamten Systems wird dann zur Zeit $t + \mathrm{d}t$ sein

$$\vec{p}_{t+\mathrm{d}t} = (m - \mathrm{d}m')(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \mathrm{d}m'\vec{u}.$$

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses eines abgeschlossenen Systems finden wir dann

$$\vec{p}_{t+\mathrm{d}t} = \vec{p}_t,$$

d. h.,

$$(m - \mathrm{d}m')(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + \mathrm{d}m'\vec{u} = m\vec{v}. \tag{1}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\mathrm{d}m' = -\mathrm{d}m$ ist, denn die Masse der entweichenden Gase bedeutet eine Verringerung des von der Rakete mitgeführten Treibstoffvorrats, dann können wir Gl. (1) in die Form bringen

$$\mathrm{d}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}m}{m}(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{m}\vec{v}_r. \tag{2}$$

In Gl. (2) haben wir das Glied $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ als kleine Größe höherer Ordnung außer Betracht gelassen und $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$ bezeichnet, wobei $\vec{v}_r$ die relative Ausströmgeschwindigkeit der Gase bezüglich der Rakete darstellt. Wenn wir in Bild 37 den Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit dem Symbol $\vec{\varrho}$ bezeichnen, dann finden wir

$$\vec{v} = v\vec{\varrho}, \quad \vec{v} = -v_r\vec{\varrho},$$

Bild 37

und wir können so Gl. (2) auf eine skalare Beziehung bringen gemäß

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{m}v_r. \tag{3}$$

Durch Integration von Gl. (3) finden wir

$$v = -v_r \ln m + C.$$

Den Wert der Integrationskonstante C ermitteln wir aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ war die Geschwindigkeit der Rakete gleich Null, d. h. $v = 0$, und die Raketenmasse hatte die Größe $m = m_0$. Nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (3) erhalten wir

$$0 = -v_r \ln m_0 + C, \quad C = v_r \ln m_0,$$

so daß wir Gl. (3) folgendermaßen schreiben können:

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}.$$

Für den Endwert der Raketengeschwindigkeit v_e gilt dann nach Verbrauch des gesamten Treibstoffs

$$v_e = v_r \ln \frac{m_0}{m_r}, \tag{4}$$

wobei m_r die Leermasse der Rakete ist. Für die gesuchte Masse des insgesamt notwendigen Treibstoffs gilt offenbar $m_{Tr} = m_0 - m_r$. Die Startmasse m_0 kann aus Gl. (4) ermittelt werden

$$m_0 = m_r \exp\left[\frac{v_e}{v_r}\right],$$

so daß gilt

$$m_{Tr} = m_r\left(\exp\left[\frac{v_e}{v_r}\right] - 1\right).$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Größen finden wir

$$m_{Tr} = 100 \text{ kg}\left(\exp\left[\frac{7{,}9}{3}\right] - 1\right) =$$

$$= 100 \text{ kg} \cdot 12{,}92 = \underline{1292 \text{ kg}}.$$

58. Eine abgewinkelte Stange mit einem L-Profil (Bild 38), deren Schenkel die Länge $a = 0{,}3$ m und $b = 0{,}15$ m haben und aus dem gleichen Material bestehen, ist im Endpunkt des einen Schenkels so gelagert, daß sie sich um eine waagerechte Achse drehen kann, die senkrecht auf der durch die Schenkel der Stange definierten Ebene steht und durch den Aufhängepunkt verläuft. Bestimmen Sie den Winkel, der in der Gleichgewichtsstellung vom Schenkel a und der Vertikalen eingeschlossen wird.

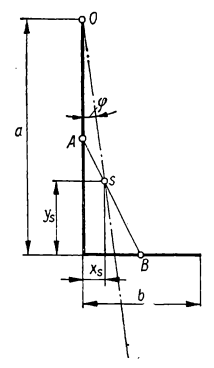


Bild 38

Lösung

Die Gleichgewichtsbedingungen erfordern, daß
a) die Vektorsumme aller auf den Körper wirkenden Kräfte gleich Null ist und
b) die Vektorsumme der Momente aller Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes gleich Null ist.

Die Bedingung (a) ist dann erfüllt, wenn das Gewicht der Stange durch ihre Aufhängung im Punkt O kompensiert ist. Die Bedingung (b) wird dann erfüllt, wenn der Schwerpunkt, der Angriffspunkt des Körpergewichts, auf einer durch den Aufhängepunkt gehenden Vertikalen liegt. Dann ist nämlich auch die Vektorsumme der Momente aller Kräfte (des Gewichts der Stange und des Widerstands der Befestigung), z. B. bezogen auf den Aufhängepunkt O, gleich Null. Wenn wir die Schwerpunktkoordinaten in einem Koordinatensystem, das aus den Schenkeln der Stange gebildet wird, mit den Symbolen x_S und y_S bezeichnen, finden wir

$$\tan\varphi = \frac{x_S}{a - y_S};$$

es gilt aber die Proportion

$$\overline{AS} : \overline{SB} = b : a$$

und ferner

$$\overline{AS}\sin\varphi : \overline{SB}\sin\varphi = b : a$$

oder auch

$$x_S : \left(\frac{b}{2} - x_S\right) = b : a,$$

woraus folgt

$$x_S = \frac{b^2}{2(a+b)}.$$

Völlig analog können wir schreiben

$$\overline{AS}\cos\varphi : \overline{SB}\cos\varphi = b : a$$

oder

$$\left(\frac{a}{2} - y_S\right) : y_S = b : a,$$

woraus wir finden

$$y_S = \frac{a^2}{2(a+b)}.$$

Es hat sich somit ergeben

$$\tan\varphi = \frac{\dfrac{b^2}{2(a+b)}}{a - \dfrac{a^2}{2(a+b)}} = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} = 0{,}125,$$

also ist der Winkel

$$\underline{\varphi = 7° \, 10'.}$$

59. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Stange der Länge l und der Masse m bezüglich einer senkrecht zu ihr stehenden Achse, die a) durch den Endpunkt der Stange und b) durch ihren Mittelpunkt geht.

Lösung

a) Für das Trägheitsmoment der Stange bezüglich der Achse O (Bild 39) können wir schreiben

$$J = \int x^2 \, \mathrm{d}m = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \underline{\frac{1}{3} ml^2};$$

b) entsprechend dem STEINERschen Satz

$$J = J_S + \frac{1}{4} ml^2$$

(J_S Trägheitsmoment der Stange, bezogen auf die Schwerpunktachse) kann J_S durch die folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$J_S = J - \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2 - \frac{1}{4} ml^2 = \underline{\frac{1}{12} ml^2}.$$

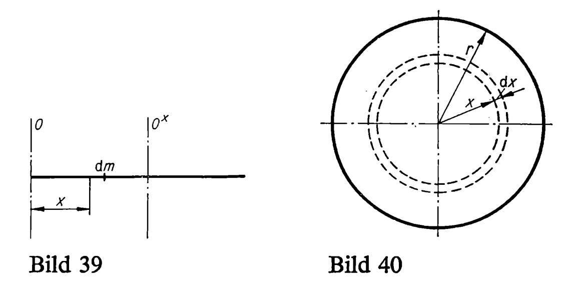


Bild 39 Bild 40

60. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen kreisförmigen Platte der Masse $m = 2$ kg und des Radius $r = 0{,}1$ m in bezug auf eine senkrecht zur Plattenebene gerichtete Mittelpunktsachse.

Lösung

Wenn wir als Massenelement $\mathrm{d}m$ ein kreisringförmiges Element der Platte mit der Breite $\mathrm{d}x$ wählen, dann kann wie in Bild 40 für das Trägheitsmoment geschrieben

werden:

$$J = \int x^2 \, dm = \int_0^r x^2 \frac{m}{\pi r^2} 2\pi x \, dx = \frac{2m}{r^2} \int_0^r x^3 dx =$$

$$= \frac{2m}{r^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = \underline{0{,}01 \text{ kg m}^2}.$$

61. Bestimmen Sie die Trägheitsmomente eines homogenen Prismas der Masse m in bezug auf die drei senkrecht auf den Flächen stehenden Mittelpunktsachsen. Die Kantenlängen seien a, b, c.

Lösung

Gemäß dem in Bild 41 dargestellten Bezugssystem und den dort verwendeten Bezeichnungen ergibt sich das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse durch die Beziehung

$$J_x = \int u^2 \, dm = \frac{m}{bc} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \, dy \, dz = 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) \, dy \, dz =$$

$$= 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \left[\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2}\right] dz = 4 \frac{m}{bc} \left[\frac{b^3 c}{48} + \frac{bc^3}{48}\right] = \underline{\frac{1}{12} m (b^2 + c^2)},$$

da das Massenelement $dm = (m/abc)\, a \, dy \, dz$ und $u^2 = y^2 + z^2$ ist. Es ist offenkundig, daß wir für die Trägheitsmomente des Prismas bezüglich der y- und z-Achsen ganz analoge Beziehungen erhalten in der Form

$$\underline{J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)}; \quad \underline{J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)}.$$

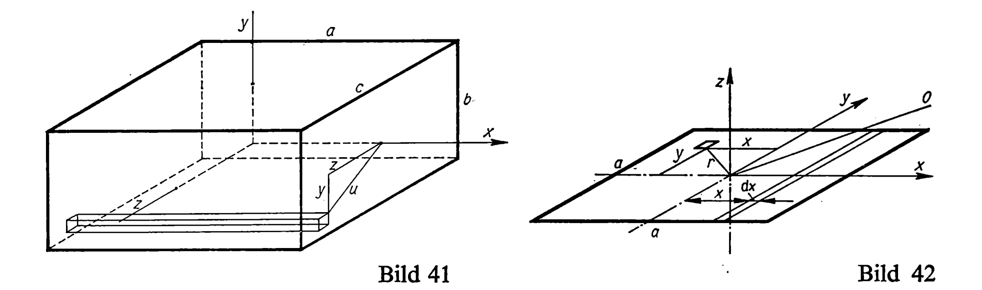


Bild 41

Bild 42

62. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen quadratischen Platte mit der Masse $m = 2$ kg und der Seitenlänge $a = 0{,}1$ m bezüglich einer Achse O, die unter einem Winkel $\varphi = 45°$ durch den Plattenmittelpunkt geht, wobei die senkrecht zur Plattenebene gerichtete Achsenprojektion parallel zur Seite des Quadrats verläuft (Bild 42).

Lösung

Für das gesuchte Trägheitsmoment gilt

$$J = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Hauptträgheitsmomente, α, β, γ Winkel, die die Achse O mit den Hauptträgheitsachsen einschließt). In unserem Beispiel sind dies die x-, y- und z-Achse. Aus Bild 42 und der Aufgabenstellung geht hervor, daß $\varphi = 45°$, $\beta = 90°$ und $\gamma = 45°$ beträgt. Wir berechnen zunächst die Hauptträgheitsmomente J_{S1}, J_{S2}, J_{S3}. Offenbar gilt für sie

$$J_{S1} = J_{S2} = \int x^2 \,\mathrm{d}m = \frac{m}{a^2} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 a \,\mathrm{d}x = \frac{m}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{12} ma^2.$$

Für J_{S3} gilt

$$J_{S3} = \int r^2 \,\mathrm{d}m = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \frac{m}{a^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{4m}{a^2} \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{ay^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \frac{4m}{a^2} \left[\frac{a^3 y}{24} + \frac{ay^3}{6}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{6} ma^2.$$

Für das gesamte Trägheitsmoment J erhalten wir dann

$$J = \frac{1}{12} ma^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{6} ma^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8} ma^2 = \frac{1}{8} 2 \,\mathrm{kg} \cdot 10^{-2} \,\mathrm{m}^2 = \underline{0{,}0025 \,\mathrm{kg\,m}^2}.$$

63. Ein Schwungrad setzt sich unter der Einwirkung einer Kraft, deren Moment bezüglich der Drehachse den Wert $M = 200$ Nm hat, in Bewegung um eine feste Achse. Nach Ablauf der ersten Minute hat es eine Drehzahl von 120 U min^{-1} erreicht. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Schwungrades?

Lösung

Die Bewegungsgleichung eines rotierenden Körpers lautet $M = J\alpha$, so daß wir finden

$$J = \frac{M}{\alpha}.$$

Da M konstant ist, ergibt sich auch für die Winkelbeschleunigung α ein konstanter Wert, so daß wir schreiben können

$$\omega = \alpha t, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Zahlenwerte erhalten wir das Trägheitsmoment des Schwungrades zu

$$J = \frac{M}{\alpha} = \frac{Mt}{2\pi n} = \frac{200\ \text{Nm} \cdot 60\ \text{s}}{2 \cdot \frac{120}{60\ \text{s}}} = \underline{955\ \text{kg m}^2}.$$

64. Eine homogene gerade Metallstange der Dichte $\varrho = 8\ \text{g cm}^{-3}$ und der Länge $l = 0{,}3$ m dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zur Stange gerichtet ist. Welchen Höchstwert darf die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung annehmen, wenn die höchstzulässige Spannung, der wir die Stange in Längsrichtung aussetzen können, 600 kp cm^{-2} beträgt?

Lösung

Die Gesamtkraft, die in Längsrichtung der Stange angreift, ist gleich der Summe der Zentrifugalkräfte, mit denen die entfernteren Gebiete der Stange auf jene wirken, die sich näher an der Rotationsachse befinden. Der Anteil der Stangenelemente an der Gesamtkraft (Bild 43) beträgt dann

$$\mathrm{d}F = x\omega^2\,\mathrm{d}m = \varrho A\omega^2 x\,\mathrm{d}x,$$

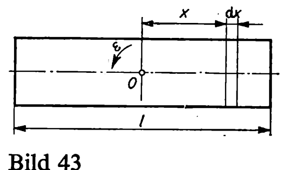


Bild 43

wenn wir den Querschnitt der Stange mit A bezeichnen. Die wirkende Gesamtkraft wird dann wie folgt gefunden:

$$F = \varrho A\omega^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x\,\mathrm{d}x = \varrho A\omega^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{\varrho A\omega^2 l^2}{8}.$$

Die höchstzulässige Spannung beträgt

$$\frac{F}{A} = 600\ \text{kp cm}^{-2},$$

und damit ist

$$A \cdot 600\ \text{kp cm}^{-2} = \frac{\varrho A \omega^2 l^2}{8},$$

woraus für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit resultiert

$$\omega = \sqrt{\frac{8 \cdot 600\ \text{kp cm}^{-2}}{\varrho l^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 600 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4\ \text{N m}^{-2}}{8 \cdot 10^3\ \text{kg m}^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2}} \approx \underline{809\ \text{s}^{-1}}.$$

65. Wie groß muß die Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse y in einer in Bild 44 aufgebauten Anordnung sein, damit der Auslenkungswinkel φ der beiden Stangen von $l = 1$ m Länge einen Betrag von 45 °C annimmt?

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe stellen wir uns zweckmäßigerweise auf den Standpunkt des mitrotierenden Bezugssystems. In diesem Bezugssystem befinden sich beide Stangen im Gleichgewichtszustand. Dann aber muß das Gesamtmoment der auf die Stangen wirkenden Kräfte, d. h. des Stangengewichts und der Zentrifugalkräfte (z. B. in bezug auf einen Punkt 0), gleich Null sein. Für den Wert des Moments, das vom Gewicht der Stange herrührt, bezogen auf den Punkt 0, gilt

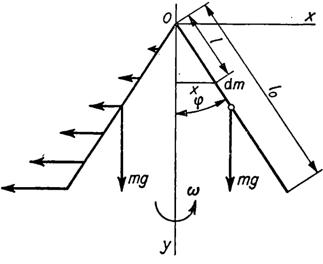


Bild 44

$$M_1 = mg \frac{l_0}{2} \sin \varphi.$$

Den Wert des von den Zentrifugalkräften ausgeübten Moments berechnen wir wie folgt:

$$M_2 = \int x\omega^2\, dm\, l \cos \varphi = \int_0^{l_0} l \sin \varphi\, \omega^2 \frac{m}{l_0}\, dl\, l \cos \varphi =$$

$$= \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{l_0} l^2\, dl = \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \left[\frac{l^3}{3}\right]_0^{l_0} = \frac{1}{3} m l_0^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Da die Momente der Gewichtskraft und der Zentrifugalkräfte in bezug auf einen Punkt 0 (Bild 44) entgegengesetzt gerichtet sind, ist die Gleichgewichtsbedingung durch die Beziehung gegeben:

$$mg \frac{l_0}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3} m l_0^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Für den Wert der bei vorgegebener Auslenkung erforderlichen Winkelgeschwindigkeit finden wir somit

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\, l_0 \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{3g\sqrt{2}}{2 l_0}} = \underline{4{,}56\ \text{s}^{-1}}.$$

66. Ein zylindrischer Körper mit der Masse $m = 10$ kg und dem Radius $r = 0{,}2$ m dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$ um seine Längsachse. Berechnen Sie den Drehimpuls des Körpers in bezug auf einen beliebigen Punkt der Drehachse (Bild 45).

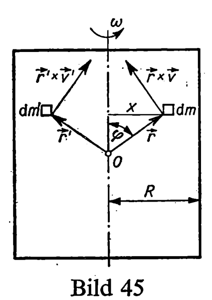


Bild 45

Lösung

Für den Drehimpuls eines Körpers in bezug auf einen Punkt 0 auf seiner Drehachse können wir schreiben

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, \mathrm{d}m.$$

Die beiden symmetrisch angeordneten Massenelemente dm und dm' tragen zum Gesamtdrehimpuls nur durch diejenigen Komponenten ihrer Drehimpulse bei, die in Richtung der Drehachse zeigen, denn die senkrecht zur Drehachse weisenden Komponenten ergeben zusammen den Wert Null. Da $\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{v}$ gerichtet ist ($\vec{r} \perp \vec{v}$), gilt für den Drehimpuls, der offensichtlich in die Richtung der Drehachse fällt,

$$L = \int r v \sin\varphi\, \mathrm{d}m = \int x v\, \mathrm{d}m = \int x^2 \omega\, \mathrm{d}m = \omega \int x^2\, \mathrm{d}m = J\omega,$$

denn

$$r \sin\varphi = x, \quad v = x\,\omega.$$

Da sich das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Längsachse zu $J = {}^1/_2 m r^2$ ergibt, gilt dann für den Drehimpuls

$$L = J\omega = \frac{1}{2}\, m r^2 \omega = \frac{1}{2}\, 10\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}04\ \mathrm{m}^2\, \pi\, \mathrm{s}^{-1} = \underline{0{,}628\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}}.$$

67. Eine hölzerne Stange der Länge $l = 0{,}4$ m und der Masse $m = 1$ kg kann sich um eine zur Stange senkrechte Mittelpunktsachse drehen. Das Ende der Stange wird von einem Geschoß der Masse $m_1 = 0{,}01$ kg mit der Geschwindigkeit $v_1 = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ getroffen, das sich senkrecht zur Achse und zur Stange bewegt (Bild 46). Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Stange zu drehen beginnt, wenn das Geschoß in ihr steckenbleibt.

Lösung

Hierbei wenden wir das Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses für ein abgeschlossenes System an, das in diesem Falle von Stange und Geschoß zusammen gebildet wird. Bevor das Geschoß die Stange trifft, ist der Gesamtdrehimpuls des Systems in bezug auf den Stangenmittelpunkt ausschließlich durch den auf ihn bezogenen Drehimpuls des anfliegenden Geschosses gegeben:

Bild 46

$$L_1 = m_1 v_1 \frac{l}{2}.$$

Der Drehimpuls der Stange, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Mittelpunktsachse dreht, hat – bezogen auf diesen Stangenmittelpunkt – eine in die Stangenachse fallende Richtung und dabei folgenden Wert:

$$L_2 = \int xv \, \mathrm{d}m = \int xx\omega \, \mathrm{d}m = \omega \int x^2 \, \mathrm{d}m = \omega J,$$

wobei J das Trägheitsmoment der Stange in bezug auf die Drehachse ist. Aus dem Gesetz von der Erhaltung des Drehimpulses für ein abgeschlossenes System ergibt sich dann für unser Beispiel die Gleichung

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \omega J + m_1 \frac{l}{2} v,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Geschoß zusammen mit der Stange unmittelbar nach dem Steckenbleiben weiterbewegt. Aus $v = {}^1/_2\, l\omega$ und $J = {}^1/_{12}\, ml^2$ ergibt sich

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{12} ml^2\omega + \frac{1}{4} m_1 l^2 \omega .$$

Für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit ω erhalten wir schließlich

$$\omega = \frac{m_1 v_1 l}{2J} = \frac{0{,}01 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m s}^{-1} \cdot 0{,}4 \text{ m}}{2\left(\frac{1}{12}\, 1 \text{ kg} \cdot 0{,}16 \text{ m}^2 + 0{,}01 \text{ kg}\, \frac{0{,}16 \text{ m}^2}{4}\right)} = \underline{29{,}1 \text{ s}^{-1}}.$$

68. Berechnen Sie den Inhalt an kinetischer Energie der Rotation einer Hohlkugel mit dem Außendurchmesser $d_1 = 0{,}2$ m, dem Innendurchmesser $d_2 = 0{,}18$ m und der Masse $m = 0{,}25$ kg, die sich mit der Tourenzahl $n = 1500$ U min^{-1} um ihren Durchmesser dreht.

Lösung

Für die kinetische Energie eines Körpers, der sich um eine feste Achse dreht, gilt bekanntlich

$$W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Das Massenträgheitsmoment einer Vollkugel mit dem Radius r in bezug auf ihren Durchmesser ist durch die Beziehung

$$J_\mathrm{k} = \frac{2}{5} m^* r^2$$

gegeben, wobei m^* die Masse der Vollkugel darstellt. Eine Hohlkugel kann als die Differenz zweier homogener Vollkugeln mit den Radien r_1, r_2 und den Massen m_1, m_2 angesehen werden. Für das Massenträgheitsmoment der Hohlkugel finden wir dann

$$J_\mathrm{H} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 - \frac{2}{5} m_2 r_2^2.$$

Es ist offenkundig, daß die Masse der Hohlkugel $m = m_1 - m_2$ ist. Die Massen m_1 und m_2 sowie die Radien r_1 und r_2 sind durch folgende Beziehungen miteinander verbunden:

$$m_1 : m_2 = r_1^3 : r_2^3,$$

oder

$$m_1 : m = r_1^3 : (r_1^3 - r_2^3),$$

$$m_2 : m = r_2^3 : (r_1^3 - r_2^3).$$

Mit diesen Beziehungen erhalten wir für das Massenträgheitsmoment einer Hohlkugel in bezug auf ihren Durchmesser

$$J_H = \frac{2}{5} m \left(\frac{r_1^5}{r_1^3 - r_2^3} - \frac{r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \right) = \frac{2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}.$$

Für die kinetische Energie der rotierenden Hohlkugel finden wir dann

$$W_k = \frac{1}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \omega^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \left(\frac{1500}{60\ \text{s}} \right)^2}{5} 250\ \text{g} \frac{10^5 - 9^5}{10^3 - 9^3}\ \text{cm}^2 = 18{,}6 \cdot 10^7\ \text{erg} = \underline{18{,}6\ \text{Nm}}.$$

69. Ein Schwungrad, das zusammen mit der Welle, auf der es sitzt, ein Trägheitsmoment von $J = 200\ \text{kg m}^2$ bezüglich seiner Drehachse hat, rotiert mit einer Drehzahl von $180\ \text{U min}^{-1}$. Unter dem Einfluß der in seinen Lagern wirkenden Reibung kommt es innerhalb von zwei Minuten nach dem Zeitpunkt, da äußere Kräfte zu wirken aufhören, zum Stehen. Wie groß ist das Moment der Reibungskräfte unter der Voraussetzung, daß es konstant ist?

Lösung

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir von dem Lehrsatz aus, der besagt, daß die Arbeit der äußeren Kräfte bei der Drehung eines Körpers um einen bestimmten Winkel gleich der Zunahme seines Inhalts an kinetischer Energie ist, d. h.

$$W = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2.$$

Da die Reibungskräfte in ihrer Wirkung entgegengesetzt zur Bewegung gerichtet sind, finden wir

$$W = -M\varphi$$

(M gesuchtes Moment der Reibungskräfte, φ Winkel, den der Körper bei seiner Drehung in den angegebenen zwei Minuten beschreibt, ehe er zum Stillstand kommt).

Wenn wir weiterhin die Größe der Winkelgeschwindigkeit in dem Augenblick, da die äußeren Kräfte zu wirken aufhören, mit ω_0 bezeichnen, ergibt sich

$$-M\varphi = -\frac{1}{2} J\omega_0^2,$$

so daß für das gesuchte Moment der Reibungskräfte folgt

$$M = \frac{1}{2} \frac{J\omega_0^2}{\varphi}.$$

Da jedoch $\omega = \omega_0 - \alpha t$, gilt $\omega_0 - \alpha t_0 = 0$. Es ergibt sich

$$\alpha = \frac{\omega_0}{t_0}$$

und damit

$$\varphi = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2} \alpha t_0^2 = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{t_0} t_0^2 = \frac{1}{2} \omega_0 t_0.$$

Für M können wir dann mit $t_0 = 2$ min weiter schreiben:

$$M = \frac{1}{2} \frac{J\omega_0^2}{\frac{1}{2}\omega_0 t_0} = \frac{J\omega_0}{t_0} = \frac{J\,2\pi n_0}{t_0} = \frac{200 \text{ kg m}^2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \dfrac{180}{60 \text{ s}}}{120 \text{ s}} =$$

$$= \underline{31{,}4 \text{ Nm}}.$$

70. Eine Stange der Masse $m = 2$ kg und der Länge $l = 1$ m ist auf einer horizontalen Achse gelagert, die durch den Endpunkt der Stange verläuft. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der andere Endpunkt der Stange durch seine tiefste Stellung, wenn wir die Stange aus der Höchstlage fallen lassen (Bild 47)? Mit welcher Kraft wird die die Stange tragende Achse im Moment des Durchlaufens der tiefsten Stellung beansprucht?

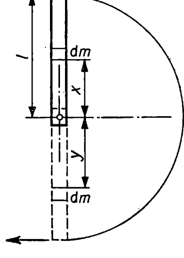


Bild 47

Lösung

Wir wenden hierbei das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an. Wenn wir die potentielle Energie der Stange hinsichtlich einer durch die Drehachse verlaufenden horizontalen Ebene betrachten, können wir für die potentielle Energie der Stange in ihrer Höchstlage wie folgt schreiben:

$$W_p = \int gx \,\mathrm{d}m = \frac{mg}{l} \int_0^l x \,\mathrm{d}x = \frac{mg}{l} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2} mgl,$$

während wir für die unterste Lage finden

$$W_p = -\frac{1}{2} mgl.$$

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie muß die Summe der Gesamtenergie in beiden Extremlagen die gleiche sein, so daß wir schreiben können

$$\frac{1}{2} mgl = -\frac{1}{2} mgl + \frac{1}{2} J\omega^2,$$

d. h.

$$mgl = \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Da weiter $\omega = \frac{v}{l}$ und $J = \frac{1}{3} ml^2$ ist, ergibt sich

$$mgl = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \frac{v^2}{l^2},$$

so daß schließlich gefunden wird

$$v = \sqrt{6gl} \approx \underline{7{,}7 \text{ m s}^{-1}}.$$

Die Kraft, mit der die Drehachse beim Durchlaufen der tiefsten Lage belastet wird, ist durch die Summe von Stangengewicht und Zentrifugalkraft gegeben. Für letztere gilt

$$F_0 = \int y\omega^2 \, dm = \frac{m}{l} \omega^2 \int_0^l y \, dy = \frac{m}{l} \omega^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2} ml\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} ml \frac{v^2}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{l} 6gl = 3 mg.$$

Damit kann die Gesamtkraft, durch welche die Achse belastet wird, wie folgt beschrieben werden:

$$F = mg + F_0 = mg + 3mg =$$

$$= 4mg = 4 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} = \underline{78{,}5 \text{ N}}.$$

71. Ein auf einer Welle sitzendes Rad hat, auf seine Drehachse bezogen, ein Trägheitsmoment J. In Bild 48 wurde um die Welle ein Seil gewunden, an dem ein Körper K hängt. Der Radius der Welle sei r. Unter dem Einfluß der Erdanziehung setzt sich der Körper nach unten in Bewegung. Wie groß ist der Weg, um den der Körper in der Zeit t_0 absinkt?

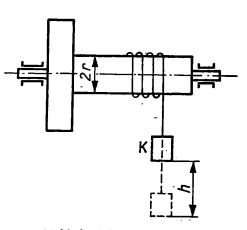


Bild 48

Lösung

Für die Lösung dieser Aufgabe wenden wir wiederum das Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie an, das für einen beliebig herausgegriffenen Moment der Bewegung des Körpers folgenden Ausdruck hat:

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

da die Abnahme der potentiellen Energie des Körpers sowohl für den Zuwachs an kinetischer Energie des Körpers ($^1/_2\, mv^2$) als auch für den Zuwachs an kinetischer Energie der Rotation ($^1/_2\, J\omega^2$) zuständig ist.
Da $v = r\omega$ ist, kann die obige Gleichung in eine neue Form gebracht werden:

$$mgh = \frac{v^2}{2}\left(\frac{J}{r^2} + m\right).$$

Wir leiten diese Gleichung nach der Zeit ab und erhalten

$$mg\frac{dh}{dt} = v\frac{dv}{dt}\left(\frac{J}{r^2} + m\right).$$

Da die Ableitung der Höhe nach der Zeit $dh/dt = v$ ist, bekommen wir für die Beschleunigung $a = dv/dt$ des Körpers die Beziehung

$$a = \frac{mg}{\frac{J}{r^2} + m}.$$

Wie ersichtlich, ist die Beschleunigung konstant, die Bewegung des Körpers wird also eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte sein. Für den Weg, um den der Körper während der Zeit t_0 herabsinkt, wird also gefunden

$$h_0 = \frac{1}{2} a t_0^2.$$

---

72. Eine homogene Kugel der Masse m und des Radius r rollt unter dem Einfluß ihres Eigengewichts auf einer schiefen Ebene, die mit der horizontalen Ebene den Winkel φ einschließt. Welche Geschwindigkeit hat der Schwerpunkt der Kugel nach Durchlaufen der Strecke s, und in welcher Beziehung steht diese Geschwindigkeit zu jener, die der Schwerpunkt der Kugel im Falle einer reibungslos verlaufenden reinen Rutschbewegung auf der gleichen schiefen Ebene haben würde?

Lösung

Entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der mechanischen Energie muß die kinetische Gesamtenergie der Kugel in jedem beliebigen Moment ihrer Bewegung gleich dem seit Bewegungsbeginn eingetretenen Verlust an potentieller Energie sein (Bild 49). Es

gilt also

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2,$$

denn die resultierende Bewegung der Kugel kann als Summe der translativen Bewegung und der Rotation um die durch den Kugelschwerpunkt gehende Achse angesehen werden.

Da das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf ihren Durchmesser mit $J = {}^2/_5\, mr^2$ angegeben wird und da $\omega = v/r$ und $h = s \sin \varphi$ ist, kann die obige Gleichung auf die Form

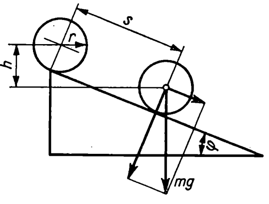


Bild 49

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mr^2 \frac{v^2}{r^2}$$



gebracht werden, woraus sich weiterhin ergibt

$$\frac{7}{10} v^2 = gs \sin \varphi,$$

d. h.

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gs \sin \varphi}.$$

Bei einer reinen, reibungslosen Rutschbewegung würde die Drehung der Kugel wegfallen, so daß für die Energie gälte

$$\frac{1}{2} mv^{*2} = mgs \sin \varphi$$

und für die Geschwindigkeit folgte

$$v^* = \sqrt{2\, gs \sin \varphi}.$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeiten v und v^* ist dann gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{5}{7}}\, v^* \approx 0{,}84\, v^*.$$

73. Ein homogener Kreiszylinder mit der Masse m und dem Radius r rollt unter Ausschaltung jeglicher Rutschbewegung infolge seines Eigengewichts auf einer schiefen Ebene, die mit der horizontalen Ebene den Winkel φ einschließt (Bild 50). Ermitteln Sie die Beschleunigung a_S des Zylinderschwerpunkts und die Geschwindigkeit v_S des Schwerpunkts nach Durchlaufen der Strecke s für den Fall, daß der Zylinder sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befand.

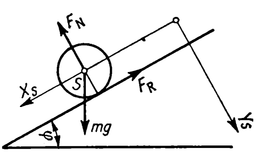


Bild 50

Lösung

Auf den Zylinder wirken die folgenden Kräfte: das Eigengewicht mg, der Widerstand der schiefen Ebene F_N, der ebenso groß ist wie die Normalkraft, mit der der Zylinder auf die schiefe Ebene drückt, und die Reibung F_R auf der Berührungslinie von Zylinder und schiefer Ebene. Die Bewegung des Zylinders kann als Bewegung des Schwerpunkts S und Rotation um die Symmetrieachse angesehen werden. Dann nimmt die Bewegungsgleichung des Zylinders die folgende Form an:

$$m \frac{d^2 x_S}{dt^2} = mg \sin \varphi - F_R;$$

$$m \frac{d^2 y_S}{dt^2} = mg \cos \varphi - F_N;$$

$$J_S \frac{d\omega}{dt} = F_R r,$$

wenn wir die Schwerpunktskoordinaten der Walze mit x_S und y_S bezeichnet haben. Es wird ersichtlich, daß in jedem Augenblick $d^2 y_S/dt^2 = 0$ gelten muß, so daß wir finden

$$mg \cos \varphi - F_N = 0$$

oder

$$F_N = mg \cos \varphi.$$

Da sich der Zylinder ohne Rutschen bewegt, ergibt sich für seine Schwerpunktsgeschwindigkeit in jedem Moment

$$v_S = \frac{dx_S}{dt} = r\omega.$$

Für die Beschleunigung des Schwerpunkts erhalten wir dann

$$a_S = \frac{d^2 x_S}{dt^2} = \frac{dv_S}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Beim Einsetzen dieses Ausdrucks in die erste Gleichung für die allgemeine Bewegung des Zylinders erhalten wir

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \varphi - F_R.$$

Wenn wir die Reibung F_R mittels der dritten Bewegungsgleichung ausdrücken, finden wir nach der Umformung

$$(mr^2 + J_S) \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin \varphi.$$

Da $J_S = {}^1/_2\, mr^2$ ist, ergibt sich weiter

$$\frac{3}{2}\, mr^2\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mgr \sin \varphi,$$

woraus für

$$a_S = r\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

folgt:

$$a_S = \frac{\mathrm{d}v_S}{\mathrm{d}t} = \underline{\frac{2}{3}\, g \sin \varphi.}$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit können wir schreiben $v_S = a_S t$, und wegen $s = {}^1/_2\, a_S t^2$, also $t = \sqrt{2s/a_S}$ finden wir die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S zu

$$v_S = a_S \sqrt{\frac{2s}{a_S}} = \sqrt{2a_S s} = \sqrt{\frac{4}{3}\, gs \sin \varphi} = \underline{2 \sqrt{\frac{gs \sin \varphi}{3}}}\,.$$

74. Eine homogene kreisförmige Platte mit der Masse $m = 2$ kg und dem Radius $r = 0{,}10$ m schwingt als physikalisches Pendel um eine horizontale Achse, die durch den Scheibenumfang verläuft. Ermitteln Sie die Periodendauer dieses physikalischen Pendels sowie seine reduzierte Pendellänge.

Lösung

Für die Periodendauer eines physikalischen Pendels gilt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}}\,.$$

Nach dem Satz von Steiner ergibt sich das Trägheitsmoment der Platte, bezogen auf die Drehachse, zu

$$J = \frac{1}{2}\, mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}\, mr^2.$$

Für die Periodendauer T erhalten wir dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}} = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{3 \cdot 0{,}10\ \mathrm{m}}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}}} = \underline{0{,}77\ \mathrm{s}}.$$

Für die reduzierte Pendellänge dieses physikalischen Pendels finden wir

$$l = \frac{J}{mr} = \frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mr} = \frac{3}{2}\, r = \underline{0{,}15\ \mathrm{m}}.$$

75. Gegeben ist eine gerade homogene Stange der Länge $l = 1$ m. Bestimmen Sie denjenigen Abstand vom Stangenmittelpunkt, in dem die Stange aufzuhängen ist, damit sie als physikalisches Pendel mit minimaler Periode schwingt.

Lösung

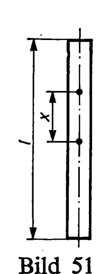


Bild 51

Die Periodendauer des physikalischen Pendels ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}} .$$

Durch Anwenden des Satzes von Steiner können wir das Trägheitsmoment der Stange in bezug auf die Pendelachse (Bild 51) bestimmen zu

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + mx^2.$$

Damit nun die Periodendauer des physikalischen Pendels ein Minimum ist, muß der Ausdruck

$$y = \frac{J}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} ml^2 + mx^2}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} l^2 + x^2}{gx}$$

ebenfalls ein Minimum sein. Das ist der Fall bei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2gx^2 - g\left(\frac{1}{12} l^2 + x^2\right)}{g^2x^2} = 0.$$

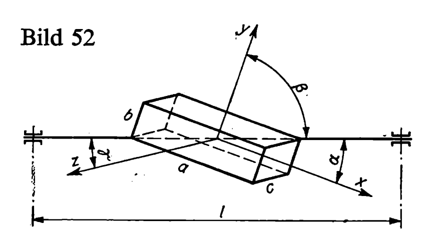
Diese Bedingung ist erfüllt für

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{1\text{ m}}{3{,}464} = \underline{0{,}29\text{ m}}.$$

Dieses Resultat entspricht der minimalen Periodendauer. Wir können uns von seiner Richtigkeit überzeugen, indem wir für das berechnete y die zweite Ableitung bilden. Das wird aber auch direkt aus der Formel für die Periodendauer des physikalischen Pendels deutlich, da $T \to \infty$ für den Fall $x \to 0$ gilt.

76. Ein homogener prismatischer Körper der Masse $m = 10$ kg mit den Abmessungen $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}05$ m, $c = 1$ m dreht sich um eine mechanische Achse (Bild 52), die in Richtung der Körperdiagonale fällt, mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\ \text{s}^{-1}$. Die Rotationsachse ist in Lagern gehaltert, die einen Abstand $l = 0{,}5$ m haben.

Bild 52



Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf seine Rotationsachse sowie die Druckkräfte, die als Folge der Zentrifugalkräfte auf die Lager wirken.

Lösung

Für das Trägheitsmoment gilt

$$J = J_{S1} \cos^2 \alpha + J_{S2} \cos^2 \beta + J_{S3} \cos^2 \gamma$$

(J_{S1}, J_{S2}, J_{S3} Hauptträgheitsmomente).
Die Hauptträgheitsachsen fallen in Richtung der x- bzw. y- bzw. z-Achse. Aus Bild 52 geht hervor, daß für die Winkel gilt

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aus dem bereits berechneten Beispiel 61 wissen wir, daß für die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen gilt

$$J_{S1} = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2), \quad J_{S2} = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2), \quad J_{S3} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Unter Einbeziehung dieser Formeln können wir schreiben:

$$J = \frac{1}{12} m \left[\frac{a^2(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{6} m \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \approx \underline{0{,}0167 \text{ kg m}^2}.$$

Die Druckkraft F, die, hervorgerufen durch die Zentrifugalkräfte, auf jedes Lager wirkt, ist eine Funktion des Moments der Zentrifugalkräfte in bezug auf einen Punkt auf der Drehachse gemäß

$$Fl = M.$$

Das Moment der Zentrifugalkräfte ist durch

$$\vec{M} = \vec{U}\omega^2$$

gegeben, wobei $\vec{U}$ das Auslenkungsmoment der Platte in bezug auf die Rotationsachse ist, für das die Beziehung gilt

$$\vec{U} = (\vec{T}_S \times \vec{\varrho}) \times \vec{\varrho},$$

in der $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse ist.
Da weiter gilt

$$\vec{T}_S = J_{S1} \vec{i}\vec{i} + J_{S2} \vec{j}\vec{j} + J_{S3} \vec{k}\vec{k},$$

sowie auch

$$\vec{\varrho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

finden wir

$$\vec{T_S}\vec{\varrho} = J_{S1}\cos\varphi\,\vec{i} + J_{S2}\cos\beta\,\vec{j} + J_{S3}\cos\gamma\,\vec{k}.$$

Für das Auslenkungsmoment $\vec{U}$ kann also geschrieben werden

$$\vec{U} = (\vec{T_S} \times \vec{\varrho}) \times \vec{\varrho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ J_{S1}\cos\varphi & J_{S2}\cos\beta & J_{S3}\cos\gamma \\ \cos\varphi & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(J_{S2}\cos\beta\cos\gamma - J_{S3}\cos\beta\cos\gamma) - \vec{j}(J_{S1}\cos\varphi\cos\gamma -$$

$$- J_{S3}\cos\varphi\cos\gamma) + \vec{k}(J_{S1}\cos\varphi\cos\beta - J_{S2}\cos\varphi\cos\beta) =$$

$$= \vec{i}(J_{S2} - J_{S3})\cos\beta\cos\gamma - \vec{j}(J_{S1} - J_{S3})\cos\varphi\cos\gamma + \vec{k}(J_{S1} - J_{S2})\cos\varphi\cos\beta =$$

$$= \frac{m}{12(a^2+b^2+c^2)}\,[bc(c^2-b^2)\,\vec{i} + ac(a^2-c^2)\,\vec{j} + ab(b^2-a^2)\,\vec{k}].$$

Für den absoluten Wert des Auslenkungsmoments erhalten wir damit

$$U = \frac{m}{12\,(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{b^2c^2(c^2-b^2)^2 + a^2c^2(a^2-c^2)^2 + a^2b^2(b^2-a^2)^2} =$$

$$= \frac{10\ \text{kg}}{12\cdot 5{,}25\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2}\cdot 7\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4 = 0{,}011\ \text{kg}\,\text{m}^2.$$

Der Wert des von den Zentrifugalkräften ausgeübten Moments ist dann

$$M = U\omega^2 = 0{,}011\ \text{kg}\,\text{m}^2\cdot 4\pi^2\ \text{s}^{-2} = 0{,}4343\ \text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2} = 0{,}4343\ \text{Nm}.$$

Für die Druckkraft in den Lagern erhalten wir

$$F = \frac{M}{l} = \frac{0{,}4343\ \text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}}{0{,}5\ \text{m}} = \underline{\underline{0{,}87\ \text{N}.}}$$

A Aufgaben

61. Vier Massenpunkte mit den Massen $m_1 = 0{,}002$ kg, $m_2 = 0{,}005$ kg, $m_3 = 0{,}010$ kg, $m_4 = 0{,}007$ kg sind in einem Raum derart angeordnet, daß sie die Lagen A_1 (0,03; 0,04; 0,05), A_2 (−0,02; −0,03; −0,04), A_3 (−0,04; 0,02; 0,07), A_4 (0,01; −0,04; −0,06) einnehmen, wobei alle Koordinaten in Metern angegeben sind. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts in diesem Massenpunktsystem.
62. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes für ein Gebilde, das Bild 53 zeigt. Man kann es sich dadurch entstanden denken, daß aus einem Rechteck mit den Seiten a und b an einer der beiden

Seiten ein Halbkreis mit dem Radius $r = b/2$ herausgeschnitten und an die andere Seite des Rechtecks angefügt wurde.

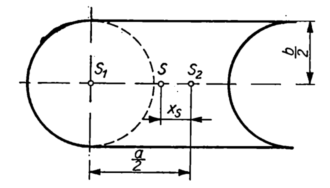


Bild 53

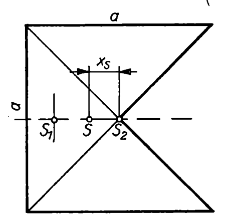


Bild 54

63. Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes für ein Gebilde, das entsteht, wenn wir aus einem Quadrat mit einer Seitenlänge a ein Dreieck herausschneiden (Bild 54).
64. Bestimmen Sie die Schwerpunktslage eines Drahtes, der in Gestalt eines Viertelkreises mit dem Radius $r = 0{,}1$ m gebogen ist.
65. Ermitteln Sie die Schwerpunktslage einer homogenen Halbkugel mit dem Radius r.
66. Zwei freie Massenpunkte A und B mit den Massen m_1 und m_2 führen eine gleichförmige Bewegung aus. Zur Zeit $t = 0$ beträgt der gegenseitige Abstand beider Punkte $\overline{AB} = d$, die Geschwindigkeit v_2 des Punktes B verläuft in Richtung der Verbindungslinie zwischen A und B, die Geschwindigkeit v_1 des Massenpunktes A ist dagegen senkrecht zur Verbindungslinie gerichtet (Bild 55). Bestimmen Sie Bahngleichung und Geschwindigkeit für den Schwerpunkt des Massenpunktsystems.

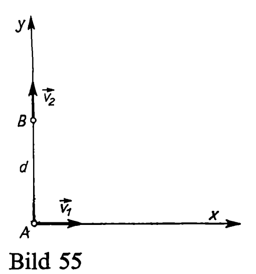


Bild 55

67. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich ein auf vollkommen glatter Eisfläche stehender Schütze in Bewegung setzt, nachdem er einen horizontalen Schuß abgefeuert hat. Die Masse von Schütze, Ausrüstung und Gewehr zusammen sei $m_1 = 70$ kg, die des Geschosses $m_2 = 0{,}010$ kg, die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses sei $v_0 = 700 \text{ m s}^{-1}$.
68. Ein mit Sand beladener Wagen der Masse $m_1 = 100$ kg führt auf horizontaler Ebene eine geradlinige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$ aus. Aus entgegengesetzter Richtung kommend, fliegt auf den Wagen eine Kugel der Masse $m_2 = 2$ kg mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 70 \text{ m s}^{-1}$ und bleibt in der Sandladung des Wagens stecken. Beide Geschwindigkeitsangaben beziehen sich auf die Straße. Bestimmen Sie, nach welcher Seite und mit welcher Geschwindigkeit sich Wagen und Kugel nach dem Einschlag weiterbewegen.
69. Mit welcher Kraft wird eine Rakete vorwärtsgetrieben, aus der in jeder Sekunde Gase mit einer Masse von 100 kg bei einer relativen Ausströmgeschwindigkeit $v_r = 3000 \text{ m s}^{-1}$ ausgestoßen werden.

70. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe in bezug auf eine in die Richtung des Durchmessers fallende Achse.
71. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe von der Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln der Länge b und der Basis $2a$ in bezug auf eine Achse, die auf der Basis senkrecht steht und durch den gegenüberliegenden Scheitelpunkt geht. Die Masse der dreieckigen Scheibe sei m.
72. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel (Masse m, Radius r) in bezug auf eine durch den Kugelmittelpunkt verlaufende Achse.
73. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe von der Gestalt eines Quadrats mit einer Seitenlänge $a = 0{,}1$ m und der Masse $m = 2$ kg in bezug auf eine Achse, die seine Diagonale ist.
74. Am Rande einer homogenen Halbkugel mit dem Gewicht $G = 100$ N, die in Bild 56 auf einer horizontalen Ebene liegt, ist ein Körper vom Gewicht $Q = 50$ N befestigt. Welcher Auslenkwinkel φ stellt sich im Gleichgewichtsfall ein?

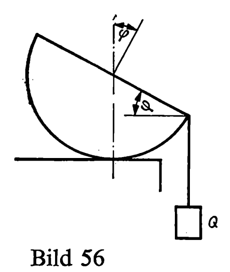


Bild 56

75. Auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel $\varphi = 10°$ gegen die Horizontale geneigt ist, steht ein Kreiszylinder mit einem Radius $r = 0{,}05$ m. Wie groß darf die Höhe des Zylinders maximal sein, damit er nicht umkippt?
76. An eine Wand ist eine Leiter gelehnt. Der Reibungskoeffizient der Leiter bezüglich der Wand ist $\mu_1 = 0{,}4$, der Reibungskoeffizient der Leiter, bezogen auf die waagerechte Unterlage $\mu_2 = 0{,}5$. Wie groß kann der minimale Winkel sein, den die Leiter mit dem waagerechten Fußboden einschließt, damit diese noch nicht wegrutscht, wenn wir voraussetzen, daß sich der Schwerpunkt der Leiter in ihrem Mittelpunkt befindet?
77. Eine homogene kreisförmige Scheibe (Radius $r = 0{,}3$ m, Masse $m = 60$ kg) wird bei ihrer Drehbewegung um eine zur Scheibenebene senkrecht gerichtete und durch den Scheibenmittelpunkt verlaufende Achse der Einwirkung äußerer Kräfte ausgesetzt, deren Moment eine konstante Komponente in Richtung der Drehachse mit einem Wert $M = 0{,}01$ kpm hat. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Drehbewegung der Scheibe sowie die Arbeit, die die äußeren Kräfte während der ersten drei Minuten der Scheibendrehung verrichten, wenn die Scheibe in der Zeit $t = 0$ in Ruhe war.
78. Berechnen Sie bei einer Vorrichtung (Bild 57) die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, bei der die Abweichung der Stange mit einer Länge $l_0 = 1$ m

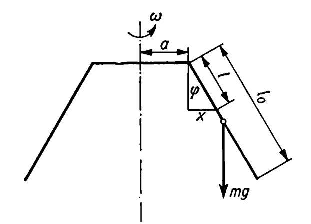


Bild 57

von der senkrechten Richtung $\varphi = 30°$ beträgt, wenn die Länge $a = 1$ m ist.

79. Berechnen Sie die kinetische Energie eines zylindrischen Körpers mit einem Radius $r = 0{,}08$ m und einer Masse $m = 1{,}5$ kg zur Zeit $t = 5$ s, wenn sich dieser Körper um seine Längsachse mit einer konstanten Winkelbeschleunigung $\alpha = \pi/8\ \mathrm{s}^{-2}$ dreht und wenn sich der Körper in der Zeit $t = 0$ in Ruhe befand.
80. Mit welcher konstanten Winkelgeschwindigkeit dreht sich eine homogene Vollkugel (Masse $m = 5$ kg, Radius $r = 0{,}1$ m) um ihren Durchmesser, wenn ihre Bewegungsenergie $W_k = 0{,}01$ kpm beträgt?
81. Eine Stange mit einer Länge $l = 1$ m ist so befestigt, daß sie sich um eine durch den Endpunkt der Stange verlaufende Achse drehen kann (Bild 58). Welche Geschwindigkeit müssen wir dem freien

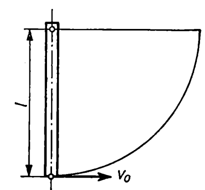


Bild 58

Endpunkt der Stange verleihen, damit er bei seiner Auslenkung von der Gleichgewichtslage die durch die Drehachse verlaufende waagerechte Ebene erreicht?
82. Ein Körper mit der Form eines kreisförmigen Reifens mit einer Masse $m = 10$ kg, einem Außendurchmesser $d = 1$ m und einer vernachlässigbaren Dicke rollt ohne Rutschbewegung auf einer schiefen Ebene, die mit der waagerechten Ebene den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt. Ermitteln Sie, durch welche Geschwindigkeit der Schwerpunkt des Reifens nach dem Durchlaufen einer Bahn $s = 5$ m gekennzeichnet ist, wenn am Anfangspunkt dieser Bahn die Geschwindigkeit des Reifens gleich Null war.
83. Ein homogener Körper, der die Form eines kreisförmigen Zylinders hat, dreht sich um seine Längsachse. Wie groß ist der Wert des Moments der äußeren Kräfte bezüglich der Drehachse, wenn sich der Wert des Drehimpulses des Körpers bezüglich der Drehachse mit der Zeit ändert, und zwar so, daß er innerhalb von 5 Sekunden vom Nullwert auf den Wert $L = 0{,}157\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ anwächst?
84. Ein Eiskunstläufer dreht sich um seine senkrechte Achse mit einer konstanten Frequenz $f_0 = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, wobei sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse $J_0 = 2\ \mathrm{kg\,m^2}$ beträgt. Um welchen Wert verringert sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, wenn er durch das Ausstrecken der Arme sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse auf den Wert $J_1 = 2{,}1\ \mathrm{kg\,m^2}$ vergrößert?
85. In welchem Mittelpunktsabstand müssen wir eine homogene kreisförmige Scheibe mit einem Radius $r = 0{,}1$ m befestigen, damit sie als physikalisches Pendel mit einer minimalen Periodendauer schwingt?
86. Eine Stange mit einer Länge $l = 1$ m schwingt als physikalisches Pendel um eine waagerechte Achse, die durch den Endpunkt der Stange verläuft. Ermitteln Sie die reduzierte Länge dieses Pendels.
87. Eine homogene kreisförmige Scheibe mit einer Masse $m = 4$ kg, einem Radius $r = 0{,}1$ m und einer vernachlässig-

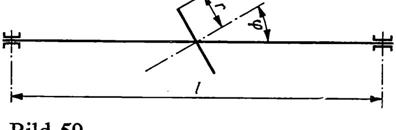


Bild 59

baren Dicke dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ um eine Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft und mit der geometrischen Achse der Scheibe den Winkel $\varphi = 30°$ einschließt (Bild 59). Die mechanische Achse der Scheibe sei in Lagern angeordnet, die in einem Abstand $l = 0{,}5$ m voneinander entfernt liegen. Berechnen Sie die durch die Zentrifugalkräfte verursachten Druckkräfte, die auf die Lager wirken.

1.4. Elastizität und Festigkeit

Unter **Spannung** σ versteht man den Quotienten aus einer Kraft $\vec{F}$ und der Fläche A, auf welche die Kraft wirkt, d. h.

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Die Spannung σ kann man zerlegen in eine Normalkomponente, die in einem gegebenen Punkt parallel zur Flächennormalen von A verläuft, und in eine Tangentialkomponente, die im gegebenen Punkt in die Tangentialebene zu A fällt. Die Normalspannung bezeichnen wir als Zug oder Druck, je nachdem, wie die wirkende Normalspannung bezüglich der Fläche, auf die sie wirkt, orientiert ist.
Im Bereich der sog. vollkommenen Elastizität besteht ein Zusammenhang zwischen den herrschenden Kräften und den durch sie hervorgerufenen Deformationen, der durch das **Hookesche Gesetz** beschrieben wird. Es besagt folgendes:
Die Deformation elastischer Körper ist den angreifenden Kräften proportional und umgekehrt.
Im Falle, daß eine Zugdeformation an einer Stange oder einem Draht der ursprünglichen Länge l_0 vorliegt, kann das HOOKEsche Gesetz mathematisch durch die Beziehung

$$\sigma = E\varepsilon$$

ausgedrückt werden (σ Normalspannung, $\varepsilon = \Delta l/l_0$ sog. relative Dehnung, E sog. Zugelastizitätsmodul, der eine Stoffkonstante ist). Ferner ist $\Delta l = l - l_0$ die Gesamtverlängerung von Stab oder Draht bei der Deformation. Eine Verlängerung des Stabes wird von einer Verringerung seines Querschnitts begleitet. Für die relative Verkürzung seiner Querdimension

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

(a_0 Größe vor, a Größe nach der Deformation) gilt

$$\eta = \frac{1}{\mu}\varepsilon = \frac{\sigma}{\mu E}.$$

μ ist die POISSONsche Konstante.
Für die *Druckdeformation* eines Stabes gelten analoge Beziehungen. Hierbei treten aber andere Verformungen auf: Verkürzung der Länge und Vergrößerung der Querschnittsfläche.
Wenn eine *Schubbeanspruchung* elastischer Körper vorliegt, wenn z. B. ein rechtwinkliges Prisma mit den Kanten a, b und c an seiner Grundfläche mit den Kanten a und b befestigt ist und wenn an seiner oberen Begrenzungsfläche eine Tangentialspannung der Größe τ angreift, kann man das HOOKEsche Gesetz durch die Beziehung

$$\tau = G\gamma$$

ausdrücken, in der γ die relative Verschiebung der oberen Begrenzungsfläche des Prismas hinsichtlich seiner (fixierten) Grundfläche und G der sog. *Schubmodul* ist.
Zwischen den Materialkonstanten E, G und μ besteht der Zusammenhang

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)} .$$

Wenn ein Stab der Länge l in horizontaler Stellung einseitig an einer festen Wand eingespannt ist und an seinem freien Ende mit einer vertikalen Kraft F belastet wird, gilt für die Abweichung h des freien Endes aus seiner ursprünglichen Lage

$$h = \frac{Fl^3}{3\,EI} ,$$

wobei I das sog. *Flächenträgheitsmoment* des Stabquerschnitts in bezug auf seine Biegeachse ist.
Wenn ein horizontal gelagerter Stab an beiden Enden gestützt ist und in der Mitte zwischen den beiden Unterstützungspunkten von einer vertikal gerichteten Kraft F belastet wird, weicht die Stabmitte aus ihrer ursprünglichen Stellung um den Betrag

$$h = \frac{Fl^3}{48\,EI}$$

ab.
Wenn ein zylindrischer Stab mit der Länge l und dem Radius r an einer seiner beiden Grundflächen befestigt ist und an seinem freien Ende durch Kräfte belastet wird, deren Moment in bezug auf die geometrische Achse des Stabes den Wert M annimmt, dann gilt für den Drehwinkel φ, um den sich der Stab verdreht, die Beziehung

$$\varphi = \frac{2\,lM}{\pi G r^4} .$$

Da der Schubmodul G auch bei einer Verdrehung wirksam ist, wird er auch als *Torsionsmodul* bezeichnet.

B Beispiele

77. Ein Draht der ursprünglichen Länge $l_0 = 10$ m ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen durch eine Kraft $F = 200$ N in Längsrichtung gespannt, wobei er eine Längenänderung um den Betrag $\Delta l = 0{,}4$ cm erfährt. Ermitteln Sie den ursprünglichen Durchmesser des Drahtes sowie seine Änderung bei der Streckung, wenn der Elastizitätsmodul des Drahtes $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} und sein Schubmodul $G = 0{,}75 \cdot 10^5$ N mm^{-2} beträgt.

Lösung

Entsprechend dem HOOKEschen Gesetz ist der Zusammenhang zwischen relativer Verlängerung und Spannung durch die Beziehung

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad \frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

gegeben, so daß wir finden

$$A = \pi r_0^2 = \frac{F l_0}{\Delta l E}.$$

Für den gesuchten Durchmesser ergibt sich dann

$$d = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{F l_0}{\pi \Delta l E}} = 2\sqrt{\frac{200\ \text{N} \cdot 1000\ \text{cm}}{\pi \cdot 0{,}4\ \text{cm} \cdot 2 \cdot 10^5\ \text{N mm}^{-2}}} \doteq \underline{0{,}178\ \text{cm.}}$$

Die relative Verringerung des Durchmessers hängt mit der relativen Verlängerung gemäß der Beziehung

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{1}{\mu}\varepsilon$$

zusammen, wobei μ die POISSONsche Konstante ist, die mit E und G gemäß der Beziehung

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}$$

verknüpft ist. Daraus folgt:

$$\mu = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{2 \cdot 0{,}75 \cdot 10^5\ \text{N mm}^{-2}}{(2 - 1{,}5)\ 10^5\ \text{N mm}^{-2}} = 3.$$

Es ist also

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit ergibt sich die Durchmesserverringerung zu

$$\Delta d = \frac{1}{3}\,\varepsilon d_0 = \frac{1}{3}\,\frac{0{,}4}{1000}\,0{,}178\text{ cm} = \underline{2{,}37 \cdot 10^{-5}\text{ cm}.}$$

78. Wie groß ist die Verlängerung eines Stabes der Länge l und der Querschnittsfläche A unter dem Einfluß seines Eigengewichts, wenn er an einem Ende befestigt ist und wenn seine Dichte ϱ und sein Elastizitätsmodul E gegeben sind?

Lösung

In Bild 60 wird jedes Stabelement dx durch das Gewicht des unter ihm hängenden Stabteils gespannt. Für die Verlängerung des Stabelements dx gilt dann

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{1}{E}\,\frac{\varrho A g x}{A}\,\mathrm{d}x = \frac{\varrho g}{E}\,x\,\mathrm{d}x.$$

Bild 60

Die Gesamtverlängerung ist durch die Summe der Verlängerungen aller einzelnen Stabelemente gegeben, so daß wir finden

$$\Delta l = \frac{\varrho g}{E}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{\varrho g}{E}\,\frac{l^2}{2}}\,.$$

79. Wie groß ist die Volumenänderung eines prismatischen Eisenstabes mit den ursprünglichen Maßen $a_0 = 1$ m, $b_0 = c_0 = 0{,}1$ m, wenn der Stab in seiner Längsrichtung mit einer Zugspannung $\sigma = 100$ N mm^{-2} belastet wird? Der Elastizitätsmodul des Eisens, aus dem der Stab gefertigt wurde, ist $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} und sein Schubmodul $G = 0{,}75 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.

Lösung

Das ursprüngliche Stabvolumen ist

$$V_0 = a_0 b_0 c_0.$$

Die einzelnen Abmessungen ändern sich durch die Belastung wie folgt:

$$a = a_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right); \quad b = c = b_0\left(1 - \frac{\sigma}{\mu E}\right).$$

Für das Volumen finden wir also nach der Deformation

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{\mu E}\right)^2 = V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{2\sigma}{\mu E} + \frac{\sigma^2}{\mu^2 E^2}\right) =$$

$$= V_0\left(1 - \frac{2\sigma}{\mu E} + \frac{\sigma^2}{\mu^2 E^2} + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{\mu}\frac{\sigma^2}{E^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\sigma^3}{E^3}\right) =$$

$$= V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2\sigma}{\mu E}\right) = V_0\left[1 + \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)\right].$$

Das ist dann der Fall, nachdem wir diejenigen Ausdrücke vernachlässigt haben, die mit den kleinen Größen höherer Ordnung σ^2/E^2 und σ^3/E^3 multipliziert wurden.
Für die Volumenänderung ergibt sich damit

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{V_0 \sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right) = a_0 b_0 c_0 \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right).$$

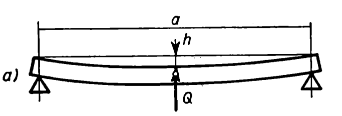
Da für die POISSONsche Konstante gilt

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)}, \quad \text{d. h.} \quad \mu = \frac{2G}{E - 2G} = \frac{2 \cdot 0{,}75 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}}{(2 - 1{,}5)\, 10^5 \text{ N mm}^{-2}} = 3,$$

erhalten wir

$$\Delta V = 100 \text{ cm} \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \; \frac{10^2 \text{ N mm}^{-2}}{2 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \underline{1{,}667 \text{ cm}^3.}$$

80. Ein Metallrohr mit der Länge a, dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a ist in waagerechter Lage an beiden Enden befestigt und wird in der Mitte durch einen Körper vom Gewicht Q belastet. Wie groß wird die Durchbiegung des Rohres in seiner Mitte, wenn der Elastizitätsmodul E des Rohrmaterials gegeben ist?



Lösung

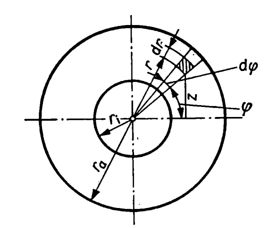


Bild 61

Für die Durchbiegung des an beiden Enden eingespannten Rohres (Bild 61 a) gilt:

$$h = \frac{Qa^3}{48EI},$$

wobei

$$I = \int z^2 \, dA$$

das Flächenträgheitsmoment des Rohrquerschnitts in bezug auf die Biegeachse ist. Da $z = r \sin \varphi$ und $dA = r \, d\varphi \, dr$ (Bild 61 b) ist, finden wir

$$I = \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 \varphi\right]_0^{2\pi} = \pi \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}.$$

Für die gesuchte Durchbiegung der Rohrmitte ergibt sich also

$$h = \frac{Qa^3}{48E\pi \frac{r_a^4 - r_i^4}{4}} = \underline{\frac{Qa^3}{12E\pi\,(r_a^4 - r_i^4)}}.$$

81. Ein zylindrischer Eisenstab (Länge $l = 0{,}5$ m, Durchmesser $d = 0{,}005$ m) ist an einem Ende befestigt und am anderen mit einem Rad vom Radius $r = 0{,}2$ m versehen (Bild 62). Welche Tangentialkraft muß am Radumfang angreifen, damit der Durchmesser des Stabes am Radende gegenüber dem Festende um den Drehwinkel $\varphi = 15°$ verdreht wird? Der Torsionsmodul des verwendeten Materials betrage $G = 0{,}73 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.

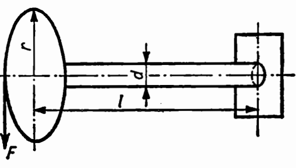


Bild 62

Lösung

Der Drehwinkel φ hängt mit dem Moment der Kräfte, welche die Verdrehung verursachen, gemäß der Beziehung

$$M = \frac{\pi G}{2} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{l} \varphi$$

zusammen. Dabei ist $M = Fr$, so daß für die gesuchte Kraft gefunden wird

$$F = \frac{\pi G d^4 \varphi}{32 l r} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}73 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2} \cdot 0{,}0625 \text{ cm}^4}{32 \cdot 50 \cdot 20 \text{ cm}^2} \cdot \frac{15\pi}{180} = \underline{11{,}75 \text{ N}}.$$

82. Eine Kreisplatte der Masse $m = 2$ kg und mit einem Radius $r = 0{,}1$ m schwingt als Torsionspendel an einem Eisendraht der Länge $l = 1$ m und mit dem Durchmesser $d = 0{,}002$ m. Bestimmen Sie den Torsionsmodul des Materials, aus dem der Draht besteht, nachdem experimentell gefunden wurde, daß die Periodendauer des Torsionspendels $T = 1{,}9$ s beträgt.

Lösung

Für die Periodendauer dieses Pendels gilt die Beziehung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_0}}$$

(J Trägheitsmoment der Kreisscheibe in bezug auf die Rotationsachse, M_0 sog. Direktionsmoment). M_0 hängt mit dem Torsionsmodul sowie den Abmessungen des

Drahtes folgendermaßen zusammen:

$$M_0 = \frac{\pi G}{2} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{l}.$$

Daraus können wir das gesuchte G erhalten

$$G = \frac{32\, l M_0}{\pi d^4}.$$

Da das Direktionsmoment M_0 mit einer Schwingung des Torsionspendels durch die Beziehung

$$M_0 = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$$

ausgedrückt werden kann, finden wir schließlich

$$G = \frac{32 l}{\pi d^4} \frac{4\pi^2}{T^2} J = \frac{32 l}{\pi d^4} \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{2} m r^2 = \frac{64 \pi m l r^2}{d^4 T^2} =$$

$$= \frac{64 \cdot 3{,}14 \cdot 2\,\text{kg} \cdot 10^2\,\text{cm} \cdot 10^2\,\text{cm}^2}{16 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^4 \cdot 1{,}9^2\,\text{s}^2} = 6{,}96 \cdot 10^6 \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{cm}^2} =$$

$$= \underline{6{,}96 \cdot 10^4\,\text{N mm}^{-2}}.$$

83. Welche Länge müßte ein Eisendraht haben, damit er unter der Wirkung seines eigenen Gewichts zerreißt, wenn er an einem Ende fest aufgehängt ist? Die Dichte des Eisens sei $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, die Festigkeitsgrenze liege bei 320 N mm^{-2}.

Lösung

Auf die verschiedenen übereinanderliegenden Querschnitte des Drahtes wirken unterschiedliche Kräfte; auf jeden Querschnitt wirkt das Gewicht des darunterhängenden Drahtteils. Die kleinste Kraft wirkt demnach auf den Querschnitt am unteren, die größte auf den am oberen, am Aufhängungsende. Die größte Spannung, unter welcher der Draht gerade noch nicht reißt, erfüllt die Bedingung

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 320\,\text{N mm}^{-2}.$$

Es ist aber $Q = \varrho g A l$, so daß wir finden

$$l = \frac{320\,\text{N mm}^{-2}}{7{,}8 \cdot 10^3\,\text{kg m}^{-3} \cdot 9{,}81\,\text{m s}^{-2}} = \underline{4{,}18\,\text{km}}.$$

Der Draht zerreißt, wenn seine Länge größer als 4,102 km ist.

A Aufgaben

88. Ein Stahldraht von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m und mit dem Durchmesser $d = 0{,}002$ m ist an einem Ende befestigt und wird am anderen Ende durch eine Kraft F in Längsrichtung belastet. Wie groß muß diese Kraft F sein, damit der Draht eine Verlängerung um 0,003 m erfährt, wenn sein Elastizitätsmodul $E = 2{,}2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} beträgt?
89. Ein Eisenstab von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m und mit dem Querschnitt $A = 10^{-4}$ m^2 ist an einem Ende befestigt und wird am anderen Ende durch die Kraft $F = 10$ kN auf Zug beansprucht. Welche Länge hat der Stab nach seiner Streckung, wenn der Elastizitätsmodul des Eisens mit $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} angegeben wird?
90. Ein zylindrisches Metallrohr von der ursprünglichen Länge $l_0 = 2$ m, dem ursprünglichen Außendurchmesser $d = 0{,}2$ m und einer Wanddicke $s = 0{,}02$ m wird durch eine Normalkraft $F = 30$ kN auf Druck beansprucht. Ermitteln Sie die Normalspannung, die am Rohrquerschnitt angreift, sowie den Betrag der Rohrverkürzung, wenn der Elastizitätsmodul des verwendeten Materials mit $E = 1{,}2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} angegeben wird.
91. Um welchen Betrag würde sich ein Stahlseil der Länge $l_0 = 9000$ m verlängern, wenn es, unter der Wirkung seines Eigengewichts stehend, frei hängend in Meerwasser hinabgelassen wird? Die Dichte des Meerwassers sei $\varrho_1 = 1{,}03 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, die des Seilmaterials $\varrho_2 = 7{,}7 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, der Elastizitätsmodul $E = 2{,}16 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.
92. Ein zylindrischer Stab der ursprünglichen Länge l_0 ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen Ende durch eine in Längsrichtung angreifende Kraft F beansprucht. Um welchen Betrag ändert sich das Stabvolumen bei der Deformation, wenn der Elastizitätsmodul mit der Größe E angegeben wird?
93. Ein Eisenstab von der Form eines Quaders mit den ursprünglichen Abmessungen $a_0 = 0{,}5$ m, $b_0 = 0{,}1$ m, $c_0 = 0{,}05$ m wird einem allseitig wirkenden, gleichförmigen Normaldruck von der Größe $\sigma = 1$ N mm^{-2} unterworfen. Um welchen Betrag verringert sich das Volumen des Quaders nach der Deformation, wenn der Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} und der Schubmodul $G = 0{,}73 \cdot 10^5$ N mm^{-2} groß ist?
94. Ein zylindrischer Eisenstab mit der Länge $l = 1$ m und dem Radius $r = 0{,}02$ m ist an seinem Ende so befestigt, daß er eine waagerechte Stellung einnimmt. Mit welcher Kraft muß man an seinem anderen Ende senkrecht zur Stabrichtung einwirken, damit sich dieses Ende durch Biegung um den Betrag $h = 0{,}005$ m gegenüber der ursprünglichen Lage verschiebt? Der Elastizitätsmodul des Stabes sei $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.
95. Ein Holzstab von rechteckigem Querschnitt mit den Seitenlängen $a = 0{,}05$ m und $b = 0{,}005$ m wird in zwei Punkten gestützt, die $l = 1$ m auseinander liegen. Die Seitenlänge a liegt in der Horizontalen. Um welchen Betrag senkt sich die Stabmitte im Vergleich zur ursprünglichen Lage, wenn wir den Stab in seiner Mitte mit einer Last $Q = 10$ N beanspruchen? Das verwendete Holz habe einen Elastizitätsmodul von $E = 1{,}2 \cdot 10^4$ N mm^{-2}.
96. Ein zylindrischer Stahlstab (Länge $l = 0{,}5$ m, Radius $r = 0{,}01$ m) ist an einem Ende befestigt, am anderen wird

er durch Kräfte verdreht, deren mit der Zylinderachse zusammenfallendes Moment mit M bezeichnet sei. Welchen Betrag muß das Moment M aufweisen, damit die Verdrehung der Zylinderdeckfläche gegenüber der Grundfläche einen Drehwinkel $\varphi = 1°$ annimmt? Der Torsionsmodul des Zylinders habe die Größe $G = 0{,}75 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.

97. Ermitteln Sie die Periodendauer eines Torsionspendels, das durch eine Kreisplatte mit der Masse $m = 3$ kg und dem Radius $r = 0{,}1$ m gebildet wird, welche an einem Draht (Länge $l = 1{,}2$ m, Radius $r_D = 0{,}001$ m) aufgehängt ist. Der Torsionsmodul des Drahtes hat den Wert $G = 0{,}716 \cdot 10^5$ N mm^{-2}.

98. Welcher Belastung hält eine Granitplatte von der Form eines regelmäßigen Sechsecks mit der Kantenlänge $a = 0{,}1$ m stand, wenn die zulässige Druckbeanspruchung für Granit mit 50 kp cm^{-2} angenommen wird?

99. Wie groß muß der Radius eines Kupferdrahtes sein, damit er unter Einfluß der in seiner Längsrichtung wirkenden Kraft $F = 500$ N nicht zerreißt? Die Zerreißfestigkeit des Kupfers wird mit 200 N mm^{-2} angenommen.

1.5. Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Eine Flüssigkeit wird dann als ideal bezeichnet, wenn sie inkompressibel ist und wenn in ihr keine innere Reibung wirkt.
Die Grundgleichung der Hydrostatik wird durch die Beziehung

$$\varrho U + p = \text{const} \qquad (1)$$

für eine inkompressible Flüssigkeit angegeben. In dieser Gleichung bedeutet ϱ die Dichte, $U = gh$ das Potential des Kräftefeldes, in dem sich die Flüssigkeit befindet, und p den Druck, der in der Flüssigkeit herrscht. Gl. (1) besagt:
In einer im Ruhezustand befindlichen inkompressiblen Flüssigkeit ist die Summe aus potentieller Energie ihres Volumens und Druck an allen Stellen gleich groß.
Wenn auf eine Flüssigkeit ein größerer Druck wirkt und wenn diese Flüssigkeit keinen allzu großen Raum einnimmt, kann in Gl. (1) das Glied ϱU bei der Druckangabe vernachlässigt werden. Dadurch vereinfacht sich Gl. (1) auf die Form

$$p = \text{const},$$

d. i. das **Pascalsche Gesetz** über die gleichmäßige Verteilung des Drucks in Flüssigkeiten.
Der Druck in einer Tiefe h unter der Oberfläche einer Flüssigkeit der Dichte ϱ, der vom Eigengewicht der Flüssigkeit verursacht wird, ist durch die Beziehung

$$p = \varrho h g$$

gegeben (g Fallbeschleunigung).
Ein Körper, der in ein flüssiges Medium (Flüssigkeit, Gas) eintaucht, unterliegt dem

Auftrieb, der nach dem **Archimedischen Gesetz** dem Gewicht derjenigen Flüssigkeitsmenge gleich ist, die vom eintauchenden Körper verdrängt wird.
Die Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, die unter der Wirkung ihres Eigengewichts aus der Öffnung eines Gefäßes ausfließt, ist durch die **Torricellische Ausflußformel** gegeben zu

$$v = \sqrt{2gh},$$

wobei h den Abstand der Ausströmöffnung von der Flüssigkeitsoberfläche darstellt. Beim Ausströmen füllt die Flüssigkeit nicht den gesamten Öffnungsquerschnitt aus. Der ausströmende Flüssigkeitsstrahl erleidet eine Verengung. Für die Flüssigkeitsmenge $\mathrm{d}V$, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch den Öffnungsquerschnitt A austritt, gilt die Beziehung

$$\mathrm{d}V = \mu A v \,\mathrm{d}t,$$

wobei μ der sog. Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls ist.
Beim stationären Strömen einer idealen Flüssigkeit durch ein Rohr wird durch jeden Querschnitt des Rohres in der Zeiteinheit die gleiche Flüssigkeitsmenge transportiert, so daß sich die **Kontinuitätsgleichung** ergibt

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

(A_1 und A_2 zwei unterschiedliche Querschnittsflächen des Rohres, v_1 und v_2 die betreffenden Strömungsgeschwindigkeiten).
Bei der stationären, wirbelfreien Strömung einer idealen Flüssigkeit ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie einer Volumeneinheit der Flüssigkeit und des Druckes an allen Stellen gleich, so daß sich die **Bernoullische Gleichung** ergibt

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho V + p = \text{const.}$$

Wenn sich in einer Flüssigkeit mit der inneren Reibung (Viskosität) η ein kugelförmiger Körper vom Radius r bewegt, dann ist die Widerstandskraft F_W, welche die Flüssigkeit der Körperbewegung entgegensetzt, nach dem **Stokesschen Gesetz** durch die Beziehung

$$F_\mathrm{W} = 6\pi\eta r v$$

gegeben, in der v die Geschwindigkeit des Körpers gegenüber der umgebenden Flüssigkeit darstellt.
Wenn wir in eine Flüssigkeit, die sich in einem weiten Gefäß befindet, ein enges Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, eine Kapillare, senkrecht eintauchen, dann nimmt der Flüssigkeitsspiegel in der Kapillare eine andere Höhe als in der umgebenden Flüssig-

keit an. Die die Wandung der Kapillare benetzende Flüssigkeit (z. B. Wasser in Glaskapillare) steigt unter der Wirkung einer *Oberflächenspannung* in der Kapillare über die Höhe im umgebenden Gefäß. Es tritt *Kapillaraszension* ein. Die Flüssigkeitsoberfläche in der Kapillare ist konkav gekrümmt, es ist ein Flüssigkeitsmeniskus. Wenn aber eine Flüssigkeit die Wandung der Kapillare nicht benetzt (z. B. Quecksilber in Glas), dann liegt der Flüssigkeitsspiegel innerhalb der Kapillare unter derjenigen in der umgebenden Flüssigkeit, es besteht *Kapillardepression*, der Meniskus ist konvex. Für die Differenz der Flüssigkeitshöhen h innerhalb der Kapillare und der umgebenden Flüssigkeit gilt bei Kapillaraszension bzw. bei Kapillardepression die Beziehung

$$\varrho g h = \frac{2\varepsilon}{r'}$$

(ϱ Dichte der Flüssigkeit, r' Radius des Meniskus, ε Oberflächenspannung der Flüssigkeit).

B Beispiele

84. Um welchen Winkel weicht der Flüssigkeitsspiegel in einem Tankwagen von der Horizontalen ab, wenn dieser mit einer Verzögerung von $a = 5\ \text{m s}^{-2}$ gebremst wird?

Lösung

Setzen wir einmal voraus, daß sich der Tankwagen (Bild 63) in Richtung des Pfeils bewegt. Wenn wir uns auf den Standpunkt eines fest mit dem Wagen verbundenen Bezugssystems stellen, befinden wir uns in einem nichtinertialen System, und die resultierende Kraft $\vec{F}'$, die auf ein beliebiges Flüssigkeitsteilchen wirkt, setzt sich aus der Gewichtskraft und der Trägheitskraft zusammen, so daß gilt

$$\vec{F}' = \vec{G} + \vec{F}.$$

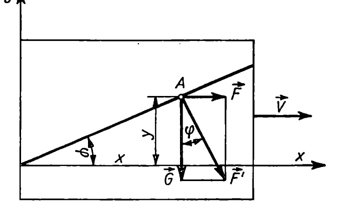


Bild 63

Bezüglich dieses nichtinertialen Systems ist $|\vec{F}| = ma$, wobei m die Masse eines beliebigen Flüssigkeitsteilchens und a die Verzögerung des Tankwagens ist. Die Richtung von $\vec{F}$ ist der Verzögerung des Wagens entgegen gerichtet. Im angeführten Bezugssystem befindet sich die Flüssigkeit in Ruhe, und wir können gemäß der Grundgleichung der Hydrostatik wie folgt schreiben:

$$\varrho U + p = \text{const.}$$

Da an jeder Stelle der Flüssigkeitsoberfläche der Druck p den gleichen Wert hat, kann man für die Flüssigkeitsoberfläche ebenfalls schreiben

$$U = \text{const},$$

wobei U das Potential der Kräfte darstellt, die auf die Flüssigkeit wirken, d. h. die Summe des aus der Gewichtskraft G und der Trägheitskraft F zusammengesetzten Potentials. Wenn wir Gewicht und Trägheitskraft auf den Ursprung des gewählten Koordinatensystems beziehen, dann ist das Gesamtpotential im Punkt A durch die Beziehung

$$U = gy - ax = \text{const}$$

gegeben. Für $x = 0$ und $y = 0$ ist auch const $= 0$. Wir erhalten also

$$gy - ax = 0, \quad \text{d. h.,} \quad y = \frac{a}{g}\,x. \tag{1}$$

Der Flüssigkeitsspiegel stabilisiert sich in einer Ebene, deren Schnittlinie mit der senkrechten Ebene, die in die Bewegungsrichtung des Wagens fällt, eine Gerade mit der Gl. (1) darstellt. Ihre Richtung wird durch den Winkel φ bestimmt, um den der Flüssigkeitsspiegel bei dieser Bremsung von der Horizontalen abweicht:

$$\tan\varphi = \frac{a}{g} = \frac{5\ \text{m s}^{-2}}{9{,}81\ \text{m s}^{-2}} = 0{,}5097, \quad \text{d. h.,} \quad \underline{\varphi = 27^\circ}.$$

85. In einem zylindrischen Gefäß mit dem Radius r befindet sich eine Flüssigkeit. Das Gefäß dreht sich um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (Bild 64). Ermitteln Sie, in welcher Form sich die Flüssigkeitsoberfläche im rotierenden Gefäß stabilisiert und um welchen Betrag der Flüssigkeitsspiegel in der Gefäßmitte gegenüber seiner Ruhelage abgesenkt wird.

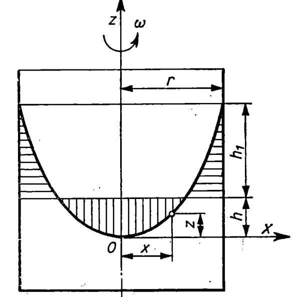


Bild 64

Lösung

Wenn wir uns auf den Standpunkt eines nichtinertialen Bezugssystems stellen, das mit dem Gefäß verbunden ist, dann befindet sich gegenüber diesem Bezugssystem auch während der Drehbewegung die Flüssigkeit in Ruhe. Aus der Grundgleichung der Hydrostatik erfahren wir

$$\varrho U + p = \text{const}.$$

Da an allen Stellen der Flüssigkeitsoberfläche der gleiche, z. B. der atmosphärische Druck besteht, ergibt sich $p = \text{const}$, und deshalb muß für die Flüssigkeitsoberfläche in jedem Punkt das Gesamtpotential der auf sie wirkenden Kräfte konstant sein gemäß

$$U = k,$$

wobei k eine Konstante darstellt.

Das Gesamtpotential ist in diesem Falle durch die Summe der Potentiale des Gewichts und der Zentrifugalkraft gegeben. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in Bild 64 kann deshalb geschrieben werden

$$gz - \frac{\omega^2 x^2}{2} = k,$$

denn das Potential der Zentrifugalkraft, bezogen auf den Ursprung des gewählten Koordinatensystems, ist

$$U_0 = -\int_0^x \omega^2 x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

woraus wir für z erhalten

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 x^2}{g} + \frac{k}{g}.$$

Die Flüssigkeitsoberfläche im rotierenden Zylinder wird die Form eines Rotations-Paraboloids annehmen. Wenn wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt des Paraboloids legen, dann ist für $x = 0$ auch $z = 0$ und damit $k = 0$, und die Gleichung der Parabel, die sich als Schnitt einer senkrechten, durch den Ursprung verlaufenden Ebene mit dem Paraboloid ergibt, nimmt die Form

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$$

an. Das Maß, um das der Flüssigkeitsspiegel durch Rotation in der Gefäßmitte absinkt, erhalten wir aus der Bedingung, daß die Flüssigkeitsmenge im senkrecht schraffierten Teilvolumen gleich der im waagerecht schraffierten ist. Für das senkrecht schraffierte Teilvolumen gilt

$$V_1 = \int_0^h \pi x^2 \, \mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}} \pi \frac{\omega^2}{g} x^3 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{\omega^2}{g}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}} = \pi \frac{g}{\omega^2} h^2.$$

Für das waagerecht schraffierte Teilvolumen ergibt sich

$$V_2 = \int_0^{h_1} (\pi r^2 - \pi x^2) \, \mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}}^{r} \left(\pi r^2 \frac{\omega^2}{g} x - \pi \frac{\omega^2}{g} x^3\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\pi r^2 \frac{\omega^2}{g}\frac{x^2}{2} - \pi \frac{\omega^2}{g}\frac{x^4}{4}\right]_{\sqrt{2\frac{g}{\omega^2}h}}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2.$$

Da die Teilvolumina gleich groß sind, ergibt sich $V_1 = V_2$, d. h.,

$$\pi r^2 h = \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4$$

oder

$$h = \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{g} r^2.$$

86. Mit welcher Kraft wirkt der Wasserinhalt auf die rechteckige Seitenwand eines Gefäßes (Breite $a = 0{,}2$ m, Höhe $b = 0{,}15$ m), wenn das Gefäß vollständig mit Wasser gefüllt ist?

Lösung

Auf ein Flächenelement $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x$ in einer Tiefe x unter dem Flüssigkeitsspiegel (Bild 65) wirkt die Kraft

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}A = \varrho g x a\,\mathrm{d}x,$$

wobei ϱ die Wasserdichte bedeutet. Für die Gesamtkraft, die auf die Seitenfläche wirkt, ergibt sich

$$F = \varrho g a \int_0^b x\,\mathrm{d}x = \varrho g a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2} \varrho g a b^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, 1\ \mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 981\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot 20\ \mathrm{cm} \cdot 225\ \mathrm{cm^2} = \underline{22{,}1\ \mathrm{N}}.$$

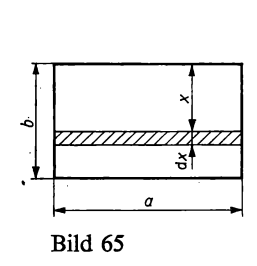


Bild 65

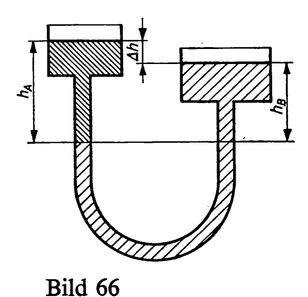


Bild 66

87. Zwei Gefäße sind miteinander verbunden (Bild 66), beide sind oben offen und mit nichtmischbaren Flüssigkeiten der Dichten $\varrho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg m^{-3} und $\varrho_2 = 1 \cdot 10^3$ kg m^{-3} gefüllt. Wie groß ist der Abstand der beiden Flüssigkeitsspiegel in den einzelnen Schenkeln von der gemeinsamen Trennungslinie, wenn die Spiegelhöhendifferenz in beiden kommunizierenden Gefäßen $\Delta h = 0{,}1$ m beträgt?

Lösung

Für den Gleichgewichtszustand gilt nach der Grundgleichung der Hydrostatik

$$\varrho U + p = \text{const.}$$

In unserem Fall bedeutet U das Gewichtspotential. Wenn wir es auf die waagerechte Ebene beziehen, die durch die gemeinsame Trennungslinie der beiden Flüssigkeiten verläuft, dann gilt für jede Flüssigkeit in jedem der beiden Schenkel $U = 0$, und demnach müssen die Drücke gleich sein. Mit den in Bild 66 gewählten Bezeichnungen muß demnach gelten

$$b + h_A \varrho_1 g = b + h_B \varrho_2 g,$$

worin b den atmosphärischen Druck bedeutet. Aus Bild 66 ist gleichfalls ersichtlich, daß

$$h_A = h_B + \Delta h,$$

so daß sich ergibt

$$(h_B + \Delta h)\, \varrho_1 g = h_B \varrho_2 g,$$

d. h.,

$$h_B(\varrho_2 - \varrho_1) = \Delta h \varrho_1 .$$

Es ist also

$$h_B = \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \Delta h = \frac{0{,}9}{0{,}1}\, 0{,}1 \text{ m} = \underline{0{,}9 \text{ m}}; \quad h_A = \underline{1{,}0 \text{ m}}.$$

88. In einem gasgefüllten Gefäß (Bild 67) soll der Druck mit einem Quecksilbervakuummeter ermittelt werden. Wie groß ist der Gasdruck im Gefäß, wenn die Höhendifferenz des Quecksilbers in den beiden Rohren des Vakuummeters den Wert $h = 0{,}45$ m hat und der atmosphärische Druck $b = 1$ atm $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa beträgt?

Lösung

Analog zum vorangehenden Beispiel müssen in der waagerechten Ebene der Trennlinie von Quecksilber und Luft die Drücke in beiden Schenkeln des Vakuummeters gleich sein. Es gilt also

$$p + \varrho g h = b,$$

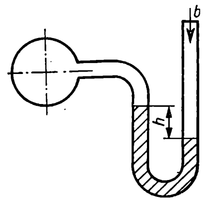


Bild 67

worin ϱ die Dichte des Quecksilbers bedeutet. Demnach ergibt sich

$$p = b - \varrho g h = 1\ \text{atm} - \frac{45}{76}\ \text{atm} = 0{,}41\ \text{atm} = \underline{4{,}16 \cdot 10^4\ \text{Pa}}.$$

89. Bestimmen Sie die Abhängigkeit des atmosphärischen Drucks als Funktion der Höhe über der Erdoberfläche unter der Voraussetzung konstanter Temperatur, und berechnen Sie den Druck in einer Höhe $h = 10000$ m über NN, wenn der Druck bei NN $b = 1$ atm beträgt und wenn die Luftdichte unter Normaldruck den Wert $\varrho_0 = 1{,}29\ \text{kg m}^{-3}$ hat.

Lösung

Wir gehen wieder von der Gleichung

$$\varrho U + p = \text{const}$$

aus. Wenn wir das Potential auf die Erdoberfläche beziehen, dann ist in einer Höhe z über der Erdoberfläche $U = gz$, so daß wir finden

$$\varrho g z + p = \text{const.}$$

Durch Ableiten nach z erhalten wir

$$-\varrho g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}.$$

Bei unterschiedlichen Drücken p und p_0 und gleicher Temperatur erfüllen die Gasdichten ϱ und ϱ_0 die Bedingung

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{p}{p_0}\varrho_0,$$

woraus sich ergibt

$$-\frac{p}{p_0}\varrho_0 g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z},$$

und nach Trennung der Variablen folgt

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g\,\mathrm{d}z.$$

Durch Integration der Gleichung

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \int_0^h \mathrm{d}z$$

erhalten wir

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\varrho_0}{p_0} gh, \quad \text{d. h.,} \quad p = p_0 \exp\left[-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right].$$

Für die in der Aufgabe vorgegebenen Zahlenwerte ergibt sich

$$p = 1\,\text{atm} \cdot \exp\left[-\frac{1{,}29}{0{,}76 \cdot 13{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}\, 9{,}81 \cdot 10^4\right] = 0{,}287\,\text{atm} = \underline{2{,}91 \cdot 10^4\,\text{Pa}}.$$

90. Ein Aräometer (Bild 68) taucht in Wasser bis in eine Tiefe h_0 und in Flüssigkeit der Dichte ϱ_1 bis in eine Tiefe h_1 ein. Wie tief taucht es in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ ein?

Lösung

Wenn wir das Archimedische Gesetz anwenden, können wir folgende Beziehungen aufschreiben:

$$mg = (V_0 + Ah_0)\,\varrho_0 g,$$

$$mg = (V_0 + Ah_1)\,\varrho_1 g,$$

$$mg = (V_0 + Ah)\,\varrho g$$

Bild 68

(ϱ_0 Wasserdichte, A Rohrquerschnitt des Aräometers, V_0 Volumen des kugelförmigen Teils des Aräometers). Für V_0 ergibt sich aus den angeführten Gleichungen

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} - Ah_0; \quad V_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Ah_1; \quad V_0 = \frac{m}{\varrho} - Ah.$$

Deshalb gelten auch die Gleichungen

$$\frac{m}{\varrho_0} - Ah_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Ah_1 \quad \text{und} \quad \frac{m}{\varrho} - Ah = \frac{m}{\varrho_0} - Ah_0.$$

Durch Auflösen beider Gleichungen nach A erhalten wir

$$A = \frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \quad \text{und} \quad A = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten vorstehender Gleichungen bekommen wir

$$\frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Es ergibt sich also

$$h_0 - h = (h_0 - h_1)\frac{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho}}{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho_1}} = (h_0 - h_1)\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{\varrho(\varrho_1 - \varrho_0)}$$

und schließlich

$$\underline{h = h_0 + (h_1 - h_0)\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{\varrho(\varrho_1 - \varrho_0)}}.$$

91. In einem Gefäß (Bild 69) befindet sich Wasser mit einer Höhe $h = 0{,}3$ m. In welcher Höhe über dem Boden des Gefäßes muß man eine Öffnung anbringen, damit das aus ihr ausströmende Wasser möglichst weit entfernt auf die Unterlage auftrifft, auf der das Gefäß steht?

Lösung

Wenn wir die Höhe der Ausflußöffnung über dem Gefäßboden mit y bezeichnen, dann gilt für die Ausströmgeschwindigkeit aus der waagerecht angelegten Öffnung

$$v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

Die Bewegung des ausströmenden Wassers stellt im Prinzip einen horizontalen Wurf dar, so daß wir schreiben können

$$y = \frac{1}{2}gt^2; \quad x = vt$$

und weiter

$$x = \sqrt{2g(h-y)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(h-y)\,y}.$$

Damit die Wurfweite x einen maximalen Wert annimmt, muß der Ausdruck

$$z = (h-y)\,y$$

ein Maximum sein. Das erhalten wir, wenn

$$\frac{dz}{dy} = h - 2y = 0, \quad \text{d. h.,} \quad y = \frac{h}{2} = \underline{0{,}15 \text{ m}}.$$

Es ist offenkundig, daß für $y = h/2$ die Größe x einen Maximalwert annimmt. Minimalwerte von x ergeben sich für $y = 0$ bzw. $y = h$, was aus dem Ausdruck für x ermittelt werden kann.

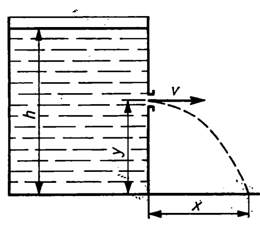




Bild 69

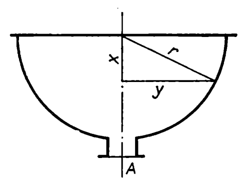


Bild 70

92. Ein halbkugelförmiges Gefäß (Bild 70) hat einen Radius $r = 0{,}1$ m und ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. An seinem Boden ist eine Öffnung mit der Querschnittsfläche $A = 4 \cdot 10^{-6}$ m². In welcher Zeit nach Freigabe der Öffnung sinkt der Flüssigkeitsspiegel im Gefäß auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes, wenn der Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls $\mu = 0{,}6$ beträgt?

Lösung

Die Ausströmgeschwindigkeit der Flüssigkeit durch die Öffnung vom Querschnitt A hat zum beliebig gewählten Zeitpunkt, an dem der Flüssigkeitsspiegel um den Betrag x abgesunken ist, den Wert

$$v = \sqrt{2g(r - x)}.$$

Für die in diesem Zustand während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ austretende Flüssigkeitsmenge gilt

$$\mathrm{d}V = \mu A v \,\mathrm{d}t.$$

Gleichzeitig ergibt sich aber auch $\mathrm{d}V = \pi y^2 \,\mathrm{d}x$ und daher

$$\mu A \sqrt{2g(r - x)}\,\mathrm{d}t = \pi y^2 \,\mathrm{d}x.$$

Da weiter

$$y^2 = r^2 - x^2$$

ist, erhalten wir nach entsprechender Umstellung

$$\mu A \sqrt{2g}\sqrt{r - x}\,\mathrm{d}t = \pi\,(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x,$$

woraus wir finden

$$\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\frac{r^2}{\sqrt{r - x}} - \frac{x^2}{\sqrt{r - x}}\right)\mathrm{d}x.$$

Die gesuchte Zeit t_0 wird durch Integration wie folgt berechnet:

$$t_0 = \frac{\pi}{\mu A\sqrt{2g}}\int\limits_0^{\frac{r}{2}} \left[r^2(r - x)^{-\frac{1}{2}} - x^2(r - x)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{\mu A\sqrt{2g}}\Bigg[-2r^2\sqrt{r - x} + 2r^2\sqrt{r - x} - \frac{4}{3}\,r\sqrt{(r - x)^3} +$$

$$+ \frac{2}{5}\sqrt{(r - x)^5}\Bigg]_0^{\frac{r}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\mu A\sqrt{2g}}\left[\frac{2}{5}\sqrt{\frac{r^5}{2^5}} - \frac{4}{3}\,r\sqrt{\frac{r^3}{2^3}} - \frac{2}{5}\sqrt{r^5} + \frac{4}{3}\,r\sqrt{r^3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu A\sqrt{g}}\,r^2\sqrt{r}\,\frac{28\sqrt{2} - 17}{30} = 493{,}3\ \mathrm{s} = \underline{8{,}22\ \mathrm{min}.}$$

93. In ein Gefäß strömt mit gleichmäßigem Strahl eine Wassermenge von $Q = 150\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$. Am Boden des Gefäßes ist eine Öffnung von $A = 0{,}5\ \mathrm{cm^2}$ Querschnittsfläche vorhanden.

In welcher Höhe stellt sich ein konstanter Wasserstand im Gefäß ein, wenn wir die Verengung des ausströmenden Strahls vernachlässigen?

Lösung

Der stationäre Zustand ist dann erreicht, wenn in der Zeiteinheit durch die Öffnung am Boden des Gefäßes die gleiche Menge ausfließt, die von oben zugeführt wird. Für die in der Zeiteinheit aus der Bodenöffnung ausströmende Wassermenge gilt

$$Q^* = Av = A\sqrt{2gh}.$$

Da die Bedingung $Q^* = Q$ vorgegeben ist, ergibt sich für die endgültige Flüssigkeitshöhe

$$h = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{225 \cdot 10^2 \text{ cm}^6 \text{ s}^{-2}}{2 \cdot 981 \text{ cm s}^{-2} \cdot 25 \cdot 10^2 \text{ cm}^4} = \underline{0{,}458 \text{ m.}}$$

94. Durch ein horizontal verlegtes Rohr mit ungleichen Querschnitten strömt Wasser (Bild 71). Es ist zu ermitteln, welche Wassermenge Q während einer Sekunde durch jeden Rohrquerschnitt fließt, wenn an den Stellen mit den Querschnitten $A_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ m² bzw. $A_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m² die beiden Schenkel eines hier angesetzten Flüssigkeitsmanometers eine Höhendifferenz der Wasserspiegel von $\Delta h = 0{,}2$ m aufweisen.

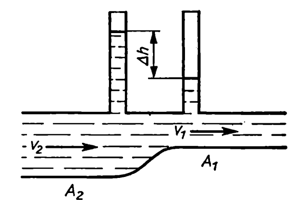


Bild 71

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir die BERNOULLIsche Gleichung an, die wir für das horizontale Rohr in folgender Form schreiben können:

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$$

oder aber

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2).$$

Jedoch ist auch

$$p_2 - p_1 = \Delta h \varrho g,$$

wobei ϱ die Dichte des Wassers ist. Damit wird

$$\Delta h \varrho g = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2). \tag{1}$$

Für die Unbekannten $v_{1,2}$ bietet sich in der Kontinuitätsgleichung eine weitere Bestimmung an:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1.$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (1) erhalten wir

$$\Delta hg = \frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right),$$

so daß wir schließlich finden

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta hg}{1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{1 - \frac{1}{4}}} = 2{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Die Wassermenge, die während einer Sekunde durch jeden Rohrquerschnitt strömt, hat somit den Wert

$$Q = v_1 A_1 = 2{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2} = 2{,}29 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\,s^{-1}} = \underline{2{,}29\,\mathrm{l\,s^{-1}}}.$$

95. In Bild 72 wird ein rechtwinklig gebogenes Rohr in eine strömende Flüssigkeit gelegt. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe h_1 erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich v_1 ist?

Lösung

Gemäß der Bernoullischen Gleichung kann man im Falle des gekrümmten Rohres schreiben

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p$$

oder

$$p - p_1 = \frac{1}{2} \varrho v_1^2$$

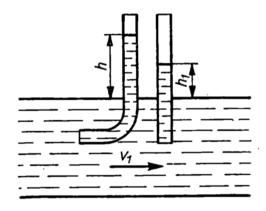


Bild 72

(p_1 Druck in der strömenden Flüssigkeit, p Druck in gleicher Tiefe im gekrümmten Rohr). In Bild 72 ist erkennbar, daß $p - p_1 = (h - h_1)\,\varrho g$ ist. Dann ergibt sich

$$(h - h_1)\,\varrho g = \frac{1}{2} \varrho v_1^2$$

und demnach also

$$h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}.$$

96. Auf einem Wagen steht ein zylindrisches Gefäß, das bis zu einer Höhe $h = 1$ m mit Wasser gefüllt ist (Bild 73). Im Gefäß sind an gegenüberliegenden Seiten zwei gleiche Ventile mit Öffnungen von je $1 \cdot 10^{-3}$ m² Querschnittsfläche angebracht. Ein Ventil befindet sich in der Höhe $h_1 = 0{,}25$ m, das andere in der Höhe $h_2 = 0{,}5$ m. In welcher Größe und Richtung muß eine Kraft F auf den Wagen ausgeübt werden, damit sich dieser bei geöffneten Ventilen nicht von der Stelle bewegt?

Lösung

Für die Lösung wenden wir das Gesetz von der Erhaltung des Impulses eines abgeschlossenen Systems an, das aus Wagen, Gefäß und Wasserfüllung gebildet wird. Nach Öffnung der Ventile beträgt die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A v_1 \vec{v}_1 + \varrho A v_2 \vec{v}_2,$$

Bild 73

denn die Wassermenge, die in der Zeiteinheit durch jede der beiden Öffnungen austritt, ist $\varrho A v_1$ bzw. $\varrho A v_2$. Jedoch ist $\vec{v}_1 = v_1 \vec{\varrho}$, $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{\varrho}$, wobei $\vec{\varrho}$ der Einheitsvektor in Geschwindigkeitsrichtung v_1 ist. Dann finden wir

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A (v_1^2 - v_2^2)\, \vec{\varrho}.$$

Da $v_1^2 = 2g(h - h_1)$ und $v_2^2 = 2g(h - h_2)$ ist, erhalten wir für die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varrho A\, 2g(h - h_1 - h + h_2)\, \vec{\varrho} = \varrho A\, 2g(h_2 - h_1)\, \vec{\varrho},$$

d. h.,

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}25 \text{ m} = 4{,}9 \text{ N}.$$

Da sich vor dem Öffnen der beiden Ventile das gesamte System in Ruhe befand, resultiert aus dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses, daß die zeitliche Änderung des Impulses von Wagen und Gefäß ebenso groß sein wird wie die zeitliche Änderung des Impulses des Wassers, jedoch von entgegengesetzter Richtung. Um die Bewegung des Wagens zu verhindern, muß man in der Richtung des Einheitsvektors $\vec{\varrho}$ mit einer Kraft vom Betrag

$$F = \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \varrho A\, 2g(h_2 - h_1) = \underline{4{,}9 \text{ N}}$$

wirken.

97. Eine Kugel aus einem Material der Dichte ϱ_1 hat einen Durchmesser $d = 2r$. Wir lassen diese Kugel in einer Flüssigkeit mit der Viskosität η und der Dichte ϱ_2 frei fallen. Wie groß wird die Geschwindigkeit der Kugel nach der Zeit t, vom Beginn der Bewegung an gemessen, und welchen Weg legt sie in dieser Zeit zurück?

Lösung

Während der Bewegung der Kugel in einer viskosen Flüssigkeit wirken auf sie die Kräfte Eigengewicht, Auftrieb gemäß dem Archimedischen Gesetz sowie Widerstand nach dem STOKESschen Gesetz. Dementsprechend nimmt die Bewegungsgleichung der Kugel die Form an

$$ma = mg - \varrho_2 Vg - 6\pi\eta rv$$

(V Volumen, v Geschwindigkeit, a Beschleunigung der Kugel) Mit $m = V\varrho_1$ für die Masse der Kugel folgt nach Umformung

$$a = g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) - \frac{6\pi\eta r}{m} v.$$

Wenn wir zur Abkürzung einführen

$$g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{6\pi\eta r}{m} = \beta$$

und

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

berücksichtigen, finden wir

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha - \beta v. \tag{1}$$

Diese Differentialgleichung kann durch die Substitution $\alpha - \beta v = u$ gelöst werden, so daß $-\mathrm{d}v = (1/\beta)\,\mathrm{d}u$ ist. Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u, \quad \text{d. h.,} \quad -\frac{\mathrm{d}u}{u} = \beta\,\mathrm{d}t.$$

Die Integration ergibt

$$-\ln u = \beta t + k; \quad \frac{1}{u} = \mathrm{e}^{\beta t + k}; \quad u = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta t + k}},$$

so daß folgt

$$\alpha - \beta v = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta t + k}}.$$

Für die Geschwindigkeit v zur Zeit t erhalten wir

$$v = \frac{\alpha - e^{-(\beta t + k)}}{\beta}.$$

Den Wert der Integrationskonstante k bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ war auch $v = 0$, so daß sich ergibt

$$0 = \alpha - \frac{1}{e^k}, \quad \text{d. h.,} \quad e^{-k} = \alpha \quad \text{und} \quad v = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta t})}{\beta}.$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Größen für α und β erhalten wir schließlich als Geschwindigkeit

$$v = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\eta r}\left(1 - \exp\left[-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right]\right).$$

Für die zurückgelegte Wegstrecke x gilt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

und damit

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^t (1 - e^{-\beta t})\, dt = \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta t} - \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Und nach Einsetzen der entsprechenden Größen für α und β erhalten wir für die zurückgelegte Wegstrecke

$$x = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\eta r}t + \frac{m^2 g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{36\pi^2\eta^2 r^2}\left(\exp\left[-\frac{6\pi\eta r}{m}t\right] - 1\right).$$

98. Ermitteln Sie die Endgeschwindigkeit eines fallenden Regentropfens in Luft, wenn der Tropfen als Kugel mit dem Radius $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m und die Viskosität der Luft mit $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ g cm^{-1} s^{-1} angenommen wird.

Lösung

Die Bewegungsgleichung des Regentropfens hat die Form

$$ma = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)g - 6\pi\eta r v$$

(ϱ_1 Wasserdichte, ϱ_2 Luftdichte). Wenn der geschwindigkeitsabhängige Luftwiderstand einen solchen Wert erreicht hat ($6\pi\eta r v$), daß die rechte Seite der Gleichung gleich Null

ist, bewegt sich von diesem Moment an der Tropfen gleichförmig geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit, die der Beziehung

$$\frac{4}{3}\,\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)\,g - 6\pi\eta r v = 0$$

genügt, d. h. mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2gr^2(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} \approx \frac{2gr^2\varrho_1}{9\eta} = \underline{121{,}1\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

99. Welche Kapillardepression des in einem Glasrohr vom Radius $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m enthaltenen Quecksilbers tritt ein, wenn die Oberflächenspannung des Quecksilbers den Wert $\sigma = 433$ erg cm^{-2} ($= 0{,}433$ Nm m^{-2}) hat und wenn der Grenzwinkel φ zwischen Quecksilber und Glaswandung 120° ist?

Lösung

Für das Absinken des Quecksilberspiegels um den Betrag h in der Kapillare gegenüber dem Flüssigkeitsspiegel der Umgebung gilt die Beziehung

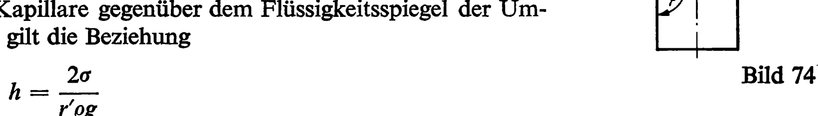


Bild 74

$$h = \frac{2\sigma}{r'\varrho g}$$

(ϱ Dichte, σ Oberflächenspannung des Quecksilbers, r' Krümmungsradius des Quecksilbermeniskus). Aus Bild 74 folgt für r und r' die Beziehung

$$r' \cos{(180^0 - \varphi)} = r,$$

so daß wir finden

$$h = \frac{2\sigma \cos{(180^0 - \varphi)}}{\varrho g r} = \frac{2 \cdot 433 \cdot 0{,}5}{0{,}1 \cdot 13{,}6 \cdot 981}\ \mathrm{cm} \approx \underline{3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}.$$

A Aufgaben

100. In einem zylindrischen Gefäß vom Radius r befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ϱ. Das Gefäß dreht sich um seine Längsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Flüssigkeitsoberfläche stabilisiert sich demnach in Form eines Paraboloids. Ermitteln Sie den Flüssigkeitsdruck in einer Tiefe h, auf der Symmetrieachse vom Scheitelpunkt des Paraboloids aus nach unten gemessen, und in der Entfernung x von der Symmetrieachse unter der Voraussetzung, daß auf die Flüssigkeitsoberfläche der barometrische Druck wirkt.

101. In der Seitenwand eines geschlossenen Gefäßes A (Bild 75), das mit Wasser gefüllt ist, befindet sich ein Steigrohranschluß B. Welcher Druck wirkt auf die freie Wasseroberfläche im Gefäß A, wenn durch die Wirkung dieses Drucks

die Wassersäule in B um 1,5 m über der in A steht und wenn der barometrische Außendruck 1 atm beträgt?

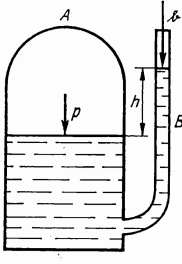


Bild 75

102. In einer bestimmten Höhe h über der Erdoberfläche wurde ein Luftdruck der Stärke $p = 0{,}5$ atm gemessen. Bestimmen Sie die Höhe h, wenn bei der Messung folgende Bedingungen galten: Luftdruck an der Erdoberfläche $p_0 =$ $= 1$ atm, Luftdichte an der Erdoberfläche $\varrho_0 = 1{,}29$ kg m^{-3}, Lufttemperatur überall gleich.
103. In einem Gefäß steht Wasser bis zur Höhe $h = 1$ m. In einer senkrechten Seitenwand ist eine Öffnung vom Radius $r = 0{,}2$ m angebracht, deren Mittelpunkt in der Höhe $h_1 = 0{,}5$ m über dem Boden des Gefäßes liegt. Sie ist mit einem Deckel verschlossen. Bestimmen Sie die Gesamtkraft, die auf den Deckel wirkt.

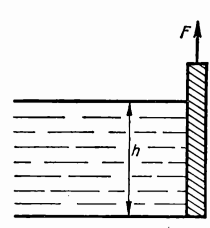


Bild 76

104. Wie groß muß eine Kraft F sein, die zum Hochstellen einer Faschine notwendig ist, die unter der Einwirkung des Wassers steht (Bild 76)? Die Masse der Faschine sei $m = 250$ kg, ihre Breite $b = 3$ m, die Wassertiefe $h = 1{,}5$ m, der Reibungskoeffizient der Faschine gegen ihre Lager sei $\mu = 0{,}3$.
105. Ein Stückchen Glas hat eine Masse von $m = 0{,}14$ kg. In Wasser getaucht beträgt seine scheinbare Masse nur noch $m' = 0{,}084$ kg. Wie groß ist die Dichte des Glases?
106. Welche Kraft muß zum Heben eines unter Wasser liegenden Steines aufgewendet werden, dessen Dichte $\varrho =$ $= 3 \cdot 10^3$ kg m^{-3} beträgt und der in Luft eine Masse von $m_1 = 15$ kg hat?
107. Eine Hohlkugel aus Messing mit der Dichte $\varrho = 8{,}5 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, dem Außendurchmesser $d_1 = 0{,}1$ m und der Wanddicke $s = 3 \cdot 10^{-3}$ m wird ins Wasser gelegt. Ermitteln Sie, ob die Kugel schwimmt oder ob sie auf den Boden sinkt.
108. Eine Messinghohlkugel der Masse $m = 0{,}3$ kg taucht zur Hälfte ihres Volumens in Wasser ein. Bestimmen Sie Außendurchmesser und Wanddicke der Kugel, wenn die Dichte des Messings $\varrho = 8{,}4 \cdot 10^3$ kg m^{-3} beträgt.

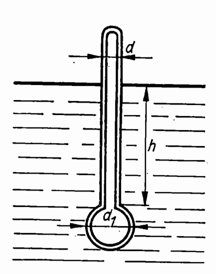


Bild 77

109. Ein Aräometer (Bild 77) hat die Gestalt einer Glasröhre, die in ihrem unteren Ende in eine mit schwerer Substanz gefüllte Kugel übergeht. Der Außendurchmesser des Rohres beträgt $d =$

$= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, der der Kugel $d_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ m, die Gesamtmasse des Aräometers ist $m = 50 \cdot 10^{-3}$ kg. Wie groß ist die Dichte der Flüssigkeit, in die das Gerät bis in die Tiefe $h = 0{,}1$ m, von unten aus gemessen, eindringt?

110. Ein zylindrisches Gefäß hat, vom Boden aus gemessen, in den Höhen h_1 und h_2 zwei übereinanderliegende Öffnungen. In welcher Höhe über dem Gefäßboden muß ein Flüssigkeitsspiegel liegen, damit die ausströmende Flüssigkeit aus beiden Öffnungen gleich weit auf eine waagerechte Ebene auftrifft, die mit dem Boden des Gefäßes zusammenfällt?

111. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasser aus der Öffnung eines Behälters, die in einer Höhe $h = 0{,}15$ m über dessen Boden liegt, wenn es in waagerechter Entfernung $d = 0{,}2$ m auf eine Ebene trifft, die mit dem Behälterboden zusammenfällt?

112. In welcher Zeit fließt die Hälfte der in einem zylindrischen Gefäß mit dem Querschnitt A enthaltenen Flüssigkeitsmenge durch eine kleine kreisförmige Öffnung am Boden des Gefäßes vom Querschnitt A_1, wenn der Verengungskoeffizient des ausströmenden Flüssigkeitsstrahls den Wert μ und wenn der anfängliche Flüssigkeitsspiegel im Gefäß die Höhe h_0 hat?

113. Eine Injektionsspritze hat eine Kolbenfläche der Größe $A_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m², ihre Öffnung eine Fläche $A_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ m². Wie lange fließt aus der waagerecht gehaltenen Spritze Wasser aus, wenn auf den Kolben eine Kraft $F = 4{,}9$ N ausgeübt und der Kolben dabei um einen Weg $l = 4 \cdot 10^{-2}$ m verschoben wird? Die innere Reibung der Flüssigkeit wird vernachlässigt.

114. Aus einer Öffnung mit der Querschnittsfläche A fließt ein Wasserstrahl der Dichte ϱ mit der Geschwindigkeit v in waagerechter Richtung aus und prallt auf eine Wand, die sich mit der Geschwindigkeit $u < v$ in gleicher Richtung fortbewegt. Mit welcher Kraft wirkt das Wasser auf die senkrechte Wand, wenn wir annehmen, daß der Wasserstrahl sich nach dem Aufprall auf die Wand nach allen Seiten gleichmäßig verteilt (Bild 78)? Bei welcher Geschwindigkeit u ist die an die Wand übertragene Leistung des Wasserstrahls ein Maximum?

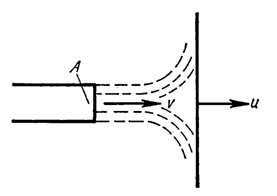


Bild 78

115. Eine Stahlkugel mit dem Radius $r = 2 \cdot 10^{-3}$ m und der Dichte $\varrho_1 = 7{,}7 \cdot 10^3$ kg m^{-3} fällt frei in Öl der Dichte $\varrho_2 = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg m^{-3} und der Viskosität $\eta = 22$ g cm^{-1} s^{-1}. Bestimmen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit der fallenden Kugel.

116. Bestimmen Sie die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit der Dichte $\varrho = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, die in einer Kapillare vom Durchmesser $d = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m um den Betrag $h = 15 \cdot 10^{-3}$ m über die umgebende Flüssigkeit aufsteigt unter der Voraussetzung völliger Benetzung.

117. Zwei Glaskapillaren mit den Radien $r_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ m und $r_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m sind in Wasser getaucht. Berechnen Sie die Oberflächenspannung des Wassers, wenn die Höhendifferenz der Wassersäulen in beiden Kapillaren $\Delta h = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ m beträgt und wenn völlige Benetzung vorausgesetzt wird.

1.6. Schwingungen und Wellen. Akustik

Als **ungedämpfte harmonische Bewegung** wird die Bewegung eines Massenpunktes bezeichnet, die unter der Wirkung einer Kraft erfolgt, die der Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Gleichgewichtslage proportional und zur Gleichgewichtslage, dem sog. Mittelpunkt der harmonischen Bewegung, hin gerichtet ist. Im allgemeinen Fall ist die Bahn der harmonischen Bewegung eines Massenpunktes elliptisch. Im Sonderfall kann sie eine Kreisbahn oder auch eine Gerade sein. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Masse m, der eine einfache harmonische ungedämpfte Bewegung auf einer Geraden ausführt, hat die Form

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx,$$

wobei x die Auslenkung des Massenpunktes aus der Gleichgewichtslage und k eine Konstante darstellt, die jene elastischen Eigenschaften der Vorrichtung charakterisiert, durch die der Massenpunkt gezwungen wird, die harmonische Bewegung auszuführen. Die Zeitfunktion der Auslenkung als Lösung der angegebenen Bewegungsgleichung hat die Form

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$\left(\omega = \sqrt{k/m},\ x_0\right.$ Amplitude, φ *Phasenkonstante*, $\omega t + \varphi$ Schwingungsphase$\left.\right)$. Für die Periodendauer einer ungedämpften harmonischen Bewegung gilt die Beziehung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Der Ausdruck $\nu = 1/T$ wird als *Schwingungsfrequenz* bezeichnet.
Wenn außer der Kraft $F = -kx$ auf den Massenpunkt eine zur Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers proportionale und der Geschwindigkeitsrichtung entgegengesetzt gerichtete Kraft (Widerstand des Mediums) wirkt, dann führt der Massenpunkt eine **gedämpfte harmonische Bewegung** aus, und seine Bewegungsgleichung nimmt die Form an

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \varrho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

wobei ϱ der Widerstandskoeffizient des betreffenden Mediums ist. Für eine periodische Bewegung lautet die Lösung der Bewegungsgleichung $(\omega_0^2 > b^2)$

$$x = x_0 \mathrm{e}^{-bt} \cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

in der $b = \varrho/2m$ und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ist. Wie aus der Gl. (1) ersichtlich, nimmt die Amplitude der Schwingung exponentiell mit der Zeit ab. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender maximaler Ausschläge nach der gleichen Seite wird als *Dämpfung* bezeichnet und ist durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi)}{x_0 e^{-b(t+T)} \cos[\omega(t+T) + \varphi]} = e^{bT}$$

gegeben, wobei $T = 2\pi/\omega$ die Periode der gedämpften harmonischen Schwingung darstellt. Der natürliche Logarithmus der Dämpfung ist das sog. *logarithmische Dekrement* δ, das durch die Beziehung gegeben ist

$$\delta = \ln \lambda = bT.$$

Wenn außer den obengenannten Kräften auf den Massenpunkt noch eine periodisch veränderliche äußere Kraft der Form $F = F_0 \sin \omega_2 t$ einwirkt, nimmt die Bewegungsgleichung des Massenpunktes die Form an

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \varrho \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_2 t.$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir für den stationären Zustand

$$x = x_0 \sin(\omega_2 t - \varphi),$$

in der x_0 und φ Konstanten darstellen, die durch die Beziehungen

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4b^2\omega_2^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{2\omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

bestimmt werden, wobei $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ und $b = \varrho/2m$ ist.

Wir sprechen davon, daß ein Massenpunkt unter der Wirkung einer äußeren Kraft **erzwungene Schwingungen** ausführt, und zwar mit der Kreisfrequenz dieser äußeren Kraft. Wie ersichtlich, ist die Amplitude solcher erzwungener Schwingungen von ω_2 abhängig. Wenn ω_2 so groß ist, daß x_0 einen maximalen Wert annimmt, dann tritt **Resonanz** ein.

Wenn ein Massenpunkt gleichzeitig zwei verschiedene Schwingungsbewegungen ausführen soll, dann ist in jedem Augenblick seiner resultierenden Bewegung die Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage durch die Vektorsumme der Auslenkungen gegeben, durch die der Massenpunkt im gegebenen Augenblick ausgezeichnet wäre, wenn er nur die eine bzw. die andere Schwingungsbewegung ausführen würde. Wir sprechen dann von einer **Überlagerung von Schwingungen.** Wenn es sich um die Über-

lagerung von parallelen Schwingungen handelt, geht die angegebene Vektorsumme der Auslenkungen in eine algebraische Summe über.
Wenn sich eine Schwingungsbewegung von einem Massenelement eines Mediums auf andere ausbreitet, sprechen wir davon, daß durch das Medium eine **Welle** läuft. Das Medium befindet sich in wellenförmiger Bewegung. Wenn die Auslenkungen der einzelnen Massenelemente des Mediums bei seiner wellenförmigen Bewegung überall und stets parallel zur Fortpflanzungsrichtung der Welle verlaufen, sprechen wir davon, daß die Welle eine Längswelle, eine **Longitudinalwelle**, ist. Wenn im Gegensatz hierzu die Auslenkungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle verlaufen, sprechen wir von einer Querwelle, einer **Transversalwelle.** Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen v_1 bzw. für die der Transversalwellen v_2 in einem bestimmten Medium gelten die Beziehungen

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

[ϱ Dichte des Mediums, E Zugelastizitätsmodul, G Schubmodul (Torsionsmodul) des Mediums].
Da in flüssigen Medien (Gase und Flüssigkeiten) $G = 0$ ist, können sich in ihnen nur Longitudinalwellen ausbreiten. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in einem gasförmigen Medium gilt

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

(p Druck im Gas, ϱ Dichte, $\varkappa$ POISSONsche Konstante, vgl. 2.3.).
Unter **Wellenlänge** verstehen wir die Strecke, die eine Welle innerhalb eines gegebenen Mediums während der Periodendauer T zurücklegt. Hierfür gilt

$$\lambda = vT,$$

wobei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der entsprechenden Welle in dem betreffenden Medium ist.
Die **Vibration** ist ein Sonderfall der wellenförmigen Bewegung. Sie stellt eine *stehende Welle* dar. Alle Elemente z. B. eines linearen Massengebildes führen bei Vibration gleichzeitig eine Schwingungsbewegung aus. Die Amplitude der Schwingungen der einzelnen Elemente ist jedoch nicht gleich, sie ist von der Lage des jeweiligen Elements abhängig. Diejenigen Elemente des Gebildes, die bei der Vibration eine Nullamplitude haben, befinden sich während der Vibration ständig in Ruhe. Man nennt die Punkte, an denen sie sich befinden, *Knoten.* Diejenigen Punkte, an denen maximale Amplituden auftreten, werden dagegen *Bäuche* genannt. Sie liegen immer zwischen zwei

Knoten. Der Abstand zwischen jeweils zwei benachbarten Knoten entspricht einer halben Wellenlänge, so daß der Abstand zwischen einem Knoten und dem ihm nächstliegenden Bauch $\lambda/4$ beträgt. Die Punkte, die auf zwei verschiedenen Seiten eines Knotens gleichauf liegen, haben eine Phasendifferenz vom Betrag π. Man sagt, sie schwingen mit entgegengesetzter Phase.
Auch für die Wellenlänge einer stehenden Welle gilt die Beziehung $\lambda = vT$, in der v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Welle in einem Medium bedeutet, das sich im Zustand einer stehenden Welle befindet. Für eine Saite, deren Längeneinheit eine Masse vom Betrag μ hat und die durch eine Kraft F gespannt wird, gilt

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,.$$

Wenn eine Welle auf die ebene Trennfläche zweier verschiedener Medien auftrifft, wird die Welle einmal in das ursprüngliche Medium hinein reflektiert, zum anderen aber tritt sie in das angrenzende Medium über. Wir sprechen dann von einer **Wellenbrechung.** Es ändert sich jedoch für den übertretenden Teil der Welle der Winkel zwischen Fortpflanzungsrichtung und der auf der Trennfläche stehenden Normalen.
Dabei ist der Reflexionswinkel der Welle φ_1 ihrem Einfallswinkel gleich. Einfallswinkel φ_1 und Brechungswinkel φ_2 erfüllen die Bedingung

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}\,,$$

in der v_1 bzw. v_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im ersten bzw. zweiten Medium bedeutet. Im Falle, daß $v_2 > v_1$ ist, wird $\varphi_2 > \varphi_1$. In diesem Falle beträgt bei einem bestimmten Winkel $\varphi_1 = \varphi_0$ und $\varphi_2 = 90°$. Wenn $\varphi_1 > \varphi_0$ ist, dann tritt die Welle nicht mehr in das andere Medium über, und es entsteht **Totalreflexion.** Der Winkel φ_0 wird Grenzwinkel genannt.
Als **Schall** bezeichnen wir denjenigen Sonderfall einer Welle, die wir mit dem Gehör wahrnehmen können. Wenn die Quelle der Schallwellen und der Beobachter, der diese wahrnimmt, zueinander relativ bewegt sind, dann äußert sich die Schallfrequenz für den Beobachter anders als in dem Fall, da sich beide relativ zueinander in Ruhe befinden. Wenn sich der Beobachter – bezogen auf das Medium (Luft, von der wir voraussetzen, daß sie sich in Ruhe befindet) – mit einer Geschwindigkeit v und die Schallquelle mit einer Geschwindigkeit u in gleicher Richtung bewegen, dann ist nach dem **Dopplerschen Prinzip** der Zusammenhang zwischen der Schallfrequenz ν', die der Beobachter wahrnimmt, und der Frequenz ν, die er wahrnehmen würde, wenn er sich relativ zur Schallquelle in Ruhe befände, durch die Beziehung

$$\nu' = \frac{c - v}{c - u}\,\nu$$

gegeben, in der c die Schallgeschwindigkeit in Luft darstellt. Wenn $v < u$ ist, dann ist $\nu' > \nu$. Für den Fall, wo v und u einander entgegengerichtet sind, nähern sich Beobachter und Schallquelle einander, und es gilt die Beziehung

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u}\nu.$$

Unter dem **Lautstärkepegel** eines beliebigen Schalls verstehen wir die durch die Beziehung

$$L = \lg \frac{J}{J_0}$$

definierte Größe, in der J die physikalische Intensität des entsprechenden Schalls ist und $J_0 = 10^{-16}$ Wcm^{-2} die sog. **Schallschwelle**, d. h. die physikalische Intensität des Normaltons mit einer Frequenz von 1000 Hz, die von einem durchschnittlichen menschlichen Ohr gerade schon nicht mehr wahrgenommen wird, bedeutet. Unter der *Wellenintensität* verstehen wir eine Größe, die zahlenmäßig der Energiemenge gleichkommt, die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle gelegene Flächeneinheit hindurchtritt.

B **Beispiele**

100. Ermitteln Sie Amplitude und Phasenkonstante der ungedämpften harmonischen Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden, wenn der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ durch die Auslenkung vom Betrag $X_0 = 5$ cm und die Geschwindigkeit $v_0 = 20$ cm s^{-1} ausgezeichnet war und seine Bewegungsfrequenz $\nu = 1$ s^{-1} betrug.

Lösung

Für die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage gilt bei einer ungedämpften harmonischen Bewegung die Beziehung

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

in der die Amplitude x_0 und die Phasenkonstante φ aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Wegen

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

kann man entsprechend der Aufgabenstellung für den Zustand zur Zeit $t = 0$ wie folgt schreiben:

$$X_0 = x_0 \cos \varphi,$$
$$v_0 = -x_0\omega \sin \varphi,$$

woraus resultiert

$$x_0 = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{4\pi^2\nu^2}} = \underline{5{,}92\ \text{cm}}$$

und weiterhin

$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{X_0\omega} = -\frac{v_0}{X_0 2\pi\nu} = -0{,}63693$$

oder

$$\underline{\varphi = -32^\circ\, 30'.}$$

101. Untersuchen Sie die Bewegung einer Kugel, die sich in einem geraden, durch den Erdmittelpunkt gehenden Kanal befindet, wenn vorausgesetzt wird, daß die im Erdinnern auf die Kugel wirkende Kraft gerade proportional zum jeweiligen Abstand Massenpunkt – Erdmittelpunkt ist. Die Kugel werde mit der Anfangsgeschwindigkeit Null in den Kanal hinab losgelassen. Es ist die Zeit zu ermitteln, in der die Kugel von der Erdoberfläche bis zum Erdmittelpunkt gelangt, sowie die Geschwindigkeit, mit der sie ihn passiert. Der Erdradius beträgt $r = 6370$ km.

Lösung

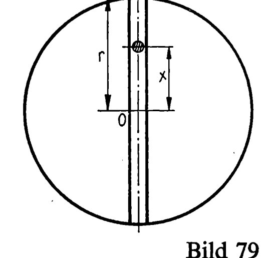


Bild 79

In Bild 79 gilt für die Kraft, die gemäß der Aufgabenstellung auf die Kugel wirkt,

$$F = -kx,$$

so daß sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

ergibt. Auf der Erdoberfläche ist die angegebene Kraft gleich dem Gewicht der Kugel, so daß man findet

$$kr = mg, \quad \text{d.h.,} \quad k = \frac{mg}{r}.$$

Man kann also weiter schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{mr}x = -\frac{g}{r}x$$

und somit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

wenn wir die Bezeichnung $g/r = \omega^2$ einführen.
Als Lösung dieser Gleichung finden wir den Ausdruck

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $x = r$, d. h., $x_0 = r$ und $\varphi = 0$, somit

$$x = r \cos \sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

Für die Zeit, welche die Kugel für den Weg bis zum Erdmittelpunkt benötigt, gilt

$$r \cos \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = 0, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = \frac{\pi}{2},$$

und damit finden wir

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = \underline{20{,}8 \text{ min}}.$$

Für die Geschwindigkeit der Kugel gilt

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

Den Erdmittelpunkt passiert die Kugel demnach mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = r \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \sqrt{\frac{g}{r}}\, t_1 = \underline{7{,}9 \text{ km s}^{-1}}.$$

102. Eine horizontal angeordnete kreisförmige Platte A (Bild 80) führt in senkrechter Richtung Schwingungen mit der Amplitude $x_0 = 0{,}75$ m aus. Wie groß darf die Schwingungsfrequenz der Platte im Höchstfall sein, damit sich der Körper B, der frei auf ihr liegt, nicht von seiner Unterlage ablöst?

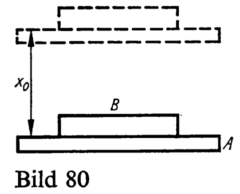


Bild 80

Lösung

Die in der Aufgabe gestellte Bedingung wird dann erfüllt, wenn im Punkt mit der maximalen Beschleunigung der Platte in abwärtiger Richtung diese maximale Beschleunigung den Wert der Erdbeschleunigung erreicht. Für die Auslenkung der Platte aus ihrer Gleichgewichtslage gilt

$$x = x_0 \cos \omega t,$$

und für die Beschleunigung der Platte erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x_0\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Die Beschleunigung hat also jeweils maximale Werte in den Punkten maximaler Auslenkung. Die in der Aufgabe gestellte Bedingung wird also bei einem solchen maximalen

Wert für ω erfüllt sein, für den gilt

$$\omega^2 x_0 = g, \quad \text{d. h.,} \quad \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{x_0}},$$

woraus wir finden

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m s}^{-2}}{0{,}75\ \text{m}}} = \underline{0{,}575\ \text{s}^{-1}}.$$

103. Auf eine Waagschale der Masse M, die an einer Schraubenfeder mit dem Elastizitätskoeffizienten k aufgehängt ist (Bild 81), fällt aus der Höhe h ein Körper der Masse m und bleibt nach dem Aufschlag darauf liegen. Die Waagschale beginnt nunmehr, eine Schwingbewegung auszuführen. Es ist die Amplitude der Schwingung zu bestimmen.

Lösung

Der Körper trifft auf die Waagschale mit einer Geschwindigkeit v_1, deren Wert aus der Beziehung

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh, \quad \text{d. h.,} \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

resultiert.
Aus dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses in einem abgeschlossenen System erhalten wir die Beziehung

$$mv_1 = (m + M)v,$$

in der v die Geschwindigkeit darstellt, mit der sich Waagschale und Körper zusammen in Bewegung setzen. Für die Geschwindigkeit gilt

$$v = \frac{mv_1}{m + M} = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}.$$

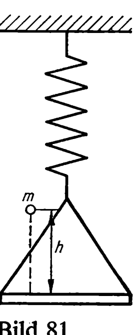


Bild 81

In der Anfangsstellung ist die Schraubenfeder aus der Gleichgewichtslage ausgezogen, in der sie sich im unbelasteten Zustand befinden würde. Für den Betrag der Auslenkung l gilt

$$Mg = kl, \quad \text{d. h.,} \quad l = \frac{Mg}{k}.$$

Aus dem Satz von der Erhaltung der Energie, der besagt, daß die Arbeit, die Kräfte längs eines bestimmten Weges an einem Körper verrichten, gleich der Zunahme seiner kinetischen Energie ist, ergibt sich

$$W = -\int_l^{x_0} kx\,\mathrm{d}x + (m + M)g(x_0 - l) = -\frac{1}{2}(m + M)v^2,$$

$$\frac{1}{2}k(x_0^2 - l^2) = \frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2}{(m + M)^2}2gh + (m + M)g(x_0 - l),$$

wobei x_0 zur maximalen Auslenkung der unbelasteten Feder aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage gehört. Wenn wir in diese Gleichung $l = Mg/k$ einsetzen, erhalten wir nach der Umformung

$$x_0^2 - \frac{2(M+m)g}{k}x_0 - \frac{2m^2gh}{(M+m)k} + \frac{M(M+2m)}{k^2}g^2 = 0,$$

woraus folgt

$$x_0 = \frac{M+m}{k}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k}}\,.$$

Zusammen mit dem daraufgefallenen Gewicht wird die Waagschale eine Schwingung um eine Gleichgewichtslage ausführen, die von der Gleichgewichtslage der unbelasteten Schraubenfeder um den Betrag l' entfernt ist, für den gilt

$$(m+M)g = kl'.$$

Die Amplitude der Schwingung ist dann

$$\underline{A = x_0 - l' = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M+m)k}}}\,.$$

104. Die Bewegung eines Massenpunktes wird durch die beiden Gleichungen $x = a\cos^2 kt$ und $y = a\sin^2 kt$ bestimmt, wobei a und k Konstanten sind. Es ist die Bewegungsbahn des Massenpunktes und das dieser Bahn entsprechende Bewegungsgesetz zu ermitteln.

Lösung

Um die Bewegungsbahn zu ermitteln, streichen wir in den angeführten Gleichungen die Zeit und erhalten

$$\underline{x + y = a.}$$

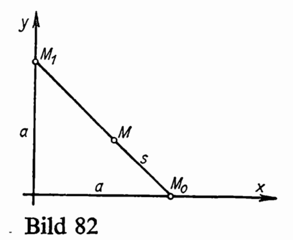


Bild 82

Es ist dies die Gleichung einer Geraden (Bild 82). Zur Zeit $t = 0$ ist $x_0 = a$ und $y_0 = 0$, so daß sich der Massenpunkt zu diesem Augenblick im Punkt M_0 befindet. Zur Zeit $t_1 = \pi/2k$ ist $x_1 = 0$ und $y_1 = a$, so daß sich der Massenpunkt in M_1 befindet. Zur Zeit $t_2 = 2t_1 = \pi/k$ erhalten wir $x_2 = a$ und $y_2 = 0$, so daß sich der Massenpunkt wieder in M_0 befindet, von wo aus sich die ganze Bewegung wiederholt. Der Massenpunkt vollführt also auf der Strecke M_0M_1 eine Schwingungsbewegung, deren Periodendauer durch

$$T = \frac{\pi}{k}$$

gegeben ist. Für die Geschwindigkeitskoordinaten des Massenpunktes gilt

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2ak \cos kt \sin kt = -ak \sin 2kt,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2ak \sin kt \cos kt = ak \sin 2kt.$$

Für den Wert der Geschwindigkeit ergibt sich somit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}\, ak \sin 2kt.$$

Wenn wir die Entfernung des Massenpunktes vom Punkt M_0 (wo sich der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ befand) mit dem Symbol s bezeichnen, dann gilt offenbar

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\, ak \sin 2kt,$$

so daß wir finden

$$s = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos 2kt + C.$$

Der Wert der Konstanten C resultiert aus den Anfangsbedingungen, die besagen, daß zur Zeit $t = 0$ auch $s = 0$ ist.
Es ist

$$C = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

und damit nimmt das Bewegungsgesetz die Form an:

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1 - \cos 2kt) = \underline{a\sqrt{2} \sin^2 kt.}$$

105. Wie groß ist die Frequenz der ungedämpften harmonischen Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m = 0{,}002$ kg, wenn die Amplitude seiner Schwingung $x_0 = 0{,}1$ m und seine Gesamtenergie bei dieser Bewegung gleich 1 Joule ist?

Lösung

Die Gesamtenergie eines Massenpunktes, der eine ungedämpfte harmonische Schwingung ausführt, ist durch die Summe von kinetischer und potentieller Energie gegeben:

$$W = W_k + W_p.$$

Da $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ist, ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

so daß wir finden

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Für die potentielle Energie eines Massenpunktes, der sich in einem Abstand x von seiner Gleichgewichtslage befindet, gilt

$$W_p = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi),$$

da $\omega^2 = k/m$ ist. Die Gesamtenergie ist dann

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 = \frac{1}{2} mx_0^2 4\pi^2\nu^2 = 2\pi^2 mx_0^2\nu^2.$$

Für die gesuchte Frequenz erhalten wir somit

$$\nu = \sqrt{\frac{W}{2\pi^2 mx_0^2}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{J}}{2 \cdot 9{,}86 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\,10^{-2}\,\mathrm{m}^2}} = \underline{50{,}35\ \mathrm{s}^{-1}}.$$

106. Wie groß ist das logarithmische Dekrement bei der harmonischen gedämpften Schwingung eines Massenpunktes, wenn dieser nach 10 s Bewegungsdauer 50 % seiner mechanischen Energie verliert und wenn die Periodendauer der gedämpften Schwingung den Wert $T = 2$ s hat?

Lösung

Die Gesamtenergie eines Massenpunktes, der eine harmonische Bewegung ausführt, ist in einem bestimmten Augenblick t durch die Beziehung

$$W_t = \frac{1}{2} kx_{0t}^2$$

gegeben, in der die Größe x_{0t} seine momentane Schwingungsamplitude darstellt. Es gilt also

$$\frac{W_t}{W_0} = \frac{\frac{1}{2} kx_{0t}^2}{\frac{1}{2} kx_0^2} = \frac{x_{0t}^2}{x_0^2} = \frac{1}{2},$$

d. h.,

$$\frac{x_{0t}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ergibt sich weiterhin

$$\frac{x_{0t}}{x_0} = \frac{x_0 e^{-\delta \frac{t}{T}}}{x_0} = e^{-\delta \frac{t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so daß wir finden

$$-\delta \frac{t}{T} = -\frac{1}{2} \ln 2, \quad \text{d. h.,} \quad \delta = \frac{T}{2t} \ln 2 = \frac{2 \text{ s}}{2 \cdot 10 \text{ s}} 0{,}693 = \underline{0{,}0693.}$$

107. Bei der Beobachtung einer gedämpften Schwingung wurde festgestellt, daß sich die Schwingungsamplitude nach zwei aufeinanderfolgenden Auslenkungen auf die gleiche Seite um 60% verringerte und daß die Periodendauer $T = 0{,}5$ s betrug.
Ermitteln Sie die Dämpfungskonstante sowie die Frequenz der ungedämpften Schwingung, die unter sonst gleichen Bedingungen vorliegen würde.

Lösung

Für das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung gilt

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = bT.$$

Gemäß der Beobachtung finden wir $x_2 = {}^4/_{10}\, x_1$, so daß wir für den Dämpfungskoeffizienten bekommen

$$b = \frac{\ln \frac{10}{4}}{0{,}5 \text{ s}} = \underline{1{,}83 \text{ s}^{-1}.}$$

Für die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung gilt

$$\omega_0^2 = \omega^2 + b^2$$

und für die Frequenz

$$\nu_0^2 = \nu^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{T^2} + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{0{,}5^2 \text{ s}^2} + \frac{(1{,}83 \text{ s}^{-1})^2}{4\pi^2} = 4{,}0848 \text{ s}^{-2},$$

also

$$\underline{\nu_0 = 2{,}02 \text{ s}^{-1}.}$$

108. Die Resonanzamplitude eines Massenpunktes, der eine erzwungene harmonische Schwingung ausführt, ist zu berechnen, wenn seine Masse $m = 0{,}1$ kg, die Kreisfrequenz seiner Eigenschwingung $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$, der Dämpfungskoeffizient $b = 3 \text{ s}^{-1}$ sowie die angreifende Kraft $F = 10$ N ist.

Lösung

Für die Amplitude eines Massenpunktes, der eine erzwungene Schwingung vollführt, gilt die Beziehung

$$x_0 = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}\,.$$

Sie wird für einen solchen Wert der Kreisfrequenz ω_{Res} maximal sein, für den

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

ist, d. h. für den der Nenner des oben angegebenen Ausdrucks ein Minimum aufweist. Dies ist demnach dann der Fall, wenn

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)\,2\omega + 8b^2\omega = 0$$

ist. Für die gesuchte Resonanzkreisfrequenz ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\omega_{\mathrm{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = 19{,}54\ \mathrm{s}^{-1},$$

und für die Resonanzamplitude erhalten wir nach Einsetzen von ω_{Res} in den Ausdruck für x_0 den Wert

$$x_{0\mathrm{Res}} = \frac{\frac{F}{m}}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = 84{,}3\ \mathrm{cm} = \underline{0{,}843\ \mathrm{m}}.$$

109. Ermitteln Sie Amplitude und Phasenkonstante einer resultierenden harmonischen Schwingung, die durch Überlagerung zweier zueinander parallel verlaufender Schwingungsbewegungen

$$x_1 = x_{01}\cos(\omega t + \varphi_1);\quad x_2 = x_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

entsteht, wenn $x_1 = x_{02} = 0{,}05$ m, $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = 60°$ beträgt.

Lösung

Für die resultierende Bewegung wird gelten:

$$x = x_1 + x_2 = x_{01}\cos(\omega t + \varphi_1) + x_{02}\cos(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= x_{01}(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1) + x_{02}(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos\omega t(x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2) - \sin\omega t(x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2).$$

Mit den Bezeichnungen

$$x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2 = x_0\cos\varphi;$$
$$x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2 = x_0\sin\varphi \qquad (1)$$

erhalten wir

$$x = x_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = x_0 \cos (\omega t + \varphi).$$

Das bedeutet: Die resultierende Bewegung ist ebenfalls eine harmonische mit der gleichen Frequenz, mit der Amplitude x_0 und der Phasenkonstanten φ, für die sich aus Gl. (1) ergibt

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)} = \underline{0{,}0965 \text{ m}};$$

$$\tan \varphi = \frac{x_{01} \sin \varphi_1 + x_{02} \sin \varphi_2}{x_{01} \cos \varphi_1 + x_{02} \cos \varphi_2} = 1, \quad \text{also} \quad \underline{\varphi = 45°}.$$

110. Zwei parallele Schwingungsbewegungen von gleicher Amplitude und gleicher Phasenkonstante mit einer Periodendauer nur geringen Unterschiedes ($T_1 = 3$ s und $T_2 = 3{,}1$ s) überlagern sich zu einer resultierenden Bewegung. Ermitteln Sie die Periodendauer der resultierenden Schwingung und die der Schwebung.

Lösung

Für die einzelnen Schwingungsbewegungen kann geschrieben werden:

$$x_1 = x_0 \sin (\omega_1 t + \varphi); \quad x_2 = x_0 \sin (\omega_2 t + \varphi).$$

Für die resultierende Schwingung wird dann gelten:

$$x = x_1 + x_2 = x_0 \sin (\omega_1 t + \varphi) + x_0 \sin (\omega_2 t + \varphi) =$$

$$= 2x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right).$$

Demnach können wir für die Periodendauer der resultierenden Schwingung schreiben

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} =$$

$$= \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = \underline{3{,}05 \text{ s.}}$$

Da sich die Amplitude der resultierenden Schwingung mit der Zeit periodisch ändert, können wir für die Periodendauer der Amplitudenänderung schreiben

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Während einer Periode der Amplitudenänderung entstehen zwei Verstärkungen und zwei Abschwächungen der Amplitude, d. h. zwei Schwebungen, deshalb können wir für

die Periodendauer der Schwebung schreiben:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \underline{93 \text{ s.}}$$

111. Ermitteln Sie die Bahn der resultierenden Bewegung, die bei der Überlagerung zweier senkrecht zueinander gerichteter harmonischer Schwingungsbewegungen mit gleichen Amplituden der Größe $A = x_0 = y_0 = 0{,}05$ m und gleicher Periodendauer, wenn die Phasendifferenz beider Bewegungen gleich $\pi/2$ ist.

Lösung

Für die resultierende harmonische Bewegung, die durch Überlagerung der beiden angegebenen harmonischen Bewegungen auf zwei senkrecht zueinander orientierten Geraden entsteht, gilt allgemein

$$\vec{r} = \vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t = (a_x \cos\omega t + b_x \sin\omega t)\,\vec{i} + (a_y \cos\omega t + b_y \sin\omega t)\,\vec{j}.$$

Wenn wir festhalten:

$$a_x = x_0 \sin\varphi_x, \quad a_y = y_0 \sin\varphi_y,$$

$$b_x = x_0 \cos\varphi_x, \quad b_y = y_0 \cos\varphi_y,$$

dann gilt

$$x_0 = +\sqrt{a_x^2 + b_x^2}, \quad y_0 = +\sqrt{a_y^2 + b_y^2},$$

$$\tan\varphi_x = \frac{a_x}{b_x}, \quad \tan\varphi_y = \frac{a_y}{b_y}.$$

Beide vorstehend angeführten Wurzeln sind mit positivem Vorzeichen versehen, weil die Größen x_0 bzw. y_0 die Bedeutung von Amplituden harmonischer Bewegungen haben; sie können daher nur positiv sein. Danach ergibt sich

$$a_x \cos\omega t + b_x \sin\omega t = x_0 \sin(\omega t + \varphi_x),$$

$$a_y \cos\omega t + b_y \sin\omega t = y_0 \sin(\omega t + \varphi_y)$$

und $$\vec{r} = x_0 \sin(\omega t + \varphi_x)\,\vec{i} + y_0 \sin(\omega t + \varphi_y)\,\vec{j}.$$

Die in Richtung der x-Achse stattfindende Bewegung ist gegenüber der in Richtung der y-Achse verlaufenden durch ein Vorauseilen der Phase gekennzeichnet: $\varphi_x - \varphi_y$. Durch geeignete Wahl des Anfangszeitpunkts aber können wir erreichen, daß $\varphi_y = 0$ ist. Wenn wir dann schreiben $\varphi_x = \varphi$ und $\varphi_y = 0$, erhalten wir

$$\vec{r} = x_0 \sin(\omega t + \varphi)\,\vec{i} + y_0 \sin\omega t\,\vec{j}.$$

In unserem Fall ist $\varphi = \pi/2$ und $x_0 = y_0 = A = 0{,}05$ m. Damit ergibt sich

$$\vec{r} = A\cos\omega t\cdot\vec{i} + A\sin\omega t\cdot\vec{j},$$

da

$$A \cos \omega t = x, \quad A \sin \omega t = y$$

und

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

wobei $r = A = 0{,}05$ m ist. Demnach ist die Bahn der resultierenden harmonischen Bewegung eine Kreislinie vom Radius $\underline{r = 0{,}05 \text{ m}}$.

112. Longitudinalwellen in Stahl sollen sich mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 5100 \text{ m s}^{-1}$ ausbreiten. Wie groß ist demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen, wenn die POISSON-Zahl $\mu = 3{,}1$ ist?

Lösung

Für die Fortpflanzung der Longitudinalwellen mit der Geschwindigkeit v_1 und die der Transversalwellen mit v_2 gelten in einem bestimmten Medium die Beziehungen

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

(E Zugelastizitätsmodul, G Schubmodul, ϱ Dichte des entsprechenden Stoffes). Aber es ist auch

$$G = \frac{\mu E}{2(\mu + 1)} = \frac{\mu}{2(\mu + 1)} \varrho v_1^2,$$

so daß wir erhalten

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu \varrho v_1^2}{2(\mu + 1) \varrho}} = v_1 \sqrt{\frac{\mu}{2(\mu + 1)}} = 5100 \text{ m s}^{-1} \cdot 0{,}61 = \underline{3111 \text{ m s}^{-1}}.$$

113. In einer KUNDTschen Röhre erzeugen wir mittels eines Stahlstabs der Länge $l = 1{,}20$ m eine stehende Welle. Die Röhre ist mit Wasserstoff gefüllt; der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten der stehenden Welle wurde durch Messung zu 0,288 m bestimmt. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit im Wasserstoff, wenn diejenige im verwendeten Stahl mit $v_S = 5300 \text{ m s}^{-1}$ angegeben wurde?

Lösung

Für die im Stab entstehende Wellenlänge gilt

$$\lambda_S = v_S T$$

und für die Wellenlänge im Wasserstoff entsprechend

$$\lambda = vT.$$

Durch Dividieren beider Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\lambda_S}{\lambda} = \frac{v_S}{v},$$

so daß wir für die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Wasserstoff erhalten

$$v = \frac{\lambda}{\lambda_S} v_S .$$

Da $\lambda_S = 2l = 2{,}40$ m und $\lambda = 2 \cdot 0{,}288$ m $= 0{,}576$ m ist, ergibt sich die Geschwindigkeit im Wasserstoff zu

$$v = \frac{0{,}576 \text{ m}}{2{,}40 \text{ m}} \cdot 5300 \text{ m s}^{-1} = \underline{1272 \text{ m s}^{-1}}.$$

114. Die Schallgeschwindigkeit in Sauerstoff beträgt unter Normalbedingungen 317,2 m s^{-1}. Wie groß ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (POISSONsche Konstante) $\varkappa = c_p/c_v$ für den Sauerstoff?

Lösung

Als Normalbedingungen bezeichnen wir die, bei denen die Gastemperatur $t = 0$ °C und der Gasdruck $p = 1$ atm beträgt. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls gilt im Gas die Beziehung

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

(ϱ Gasdichte, p Gasdruck).
Hieraus folgt

$$\varkappa = \frac{\varrho v^2}{p} .$$

Die Sauerstoffdichte unter Normalbedingungen bestimmen wir unter Zuhilfenahme der Kenntnis, daß bei diesen ein Grammolekül Sauerstoff (und darüber hinaus jedes anderen Gases überhaupt) ein Volumen von $V_0 = 22{,}4$ l beansprucht. Es ist also

$$\varrho = \frac{\mu}{V_0} = \frac{32 \text{ g}}{22{,}4 \text{ l}} = \frac{32 \text{ g}}{22{,}4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3} = 1{,}428 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3},$$

wobei $m = 32$ g die Masse eines Grammoleküls Sauerstoff bedeutet. Für den Druck p kann dann geschrieben werden

$$p = 1 \text{ atm} = 1{,}01325 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 1{,}01325 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Wir erhalten schließlich

$$\varkappa = \frac{1{,}428 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3} (3{,}172)^2 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}}{1{,}01325 \cdot 10^6 \dfrac{\text{g cm s}^{-2}}{\text{cm}^2}} = \underline{1{,}42}.$$

115. Die Grundfrequenz einer Saite der Länge $l = 2$ m mit einer Masse je Längeneinheit von $\mu = 1{,}5$ g cm^{-1} habe den Wert $\nu = 2$ s^{-1}. Durch welche Kraft wird die Saite gespannt?

Lösung

Für die Grundwellenfrequenz einer Saite gilt die Beziehung

$$\nu = \frac{v}{2l},$$

in der v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Transversalwelle in der Saite bedeutet. Weiter gilt

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

wobei F die Kraft darstellt, mit der die Saite gespannt wird. μ ist die Masse der Längeneinheit. Nach Einsetzen des Wertes für v erhalten wir

$$\nu = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2l},$$

so daß sich ergibt

$$F = 4l^2\nu^2\mu = 4 \cdot 4 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 \cdot 4\ \text{s}^{-2} \cdot 1{,}5\ \text{g cm}^{-1} = 96 \cdot 10^4\ \text{g cm s}^{-2} = \underline{9{,}6\ \text{N}}.$$

116. Bis zu welchem maximalen Einfallswinkel darf eine Schallwelle auf die Trennfläche zwischen den beiden Medien Luft und Wasser auftreffen, damit sie noch ins Wasser übertritt? Die Schallgeschwindigkeit im Wasser sei $v_2 = 1450$ m s^{-1}, in Luft bei gegebener Temperatur $v_1 = 340$ m s^{-1}.

Lösung

Der Schall wird bei allen jenen Einfallswinkeln ins Wasser übertreten, die kleiner sind als der Grenzwinkel φ_0, für den gilt

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{d. h.,} \quad \sin \varphi_0 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340\ \text{m s}^{-1}}{1450\ \text{m s}^{-1}} =$$

$$= 0{,}23448, \quad \text{also } \underline{\varphi_0 = 13°33'}.$$

Damit die Schallwelle ins Wasser übertritt, muß also ihr Einfallswinkel kleiner als der berechnete Wert von 13° 33′ sein.

117. Ein Beobachter bewegt sich auf der geraden Verbindungslinie mit einer Geschwindigkeit $v = 10\,\text{m s}^{-1}$ auf eine Schallquelle zu, die sich ihrerseits mit der Geschwindigkeit $u = 5\,\text{m s}^{-1}$ in Richtung auf den Beobachter zu bewegt. Beide Geschwindigkeitsangaben beziehen sich auf das ruhende Medium Luft, in dem sich der Schall ausbreitet. Welche Schallfrequenz nimmt der Beobachter wahr, wenn die Schallquelle einen Ton von der Frequenz $\nu = 500\,\text{s}^{-1}$ erzeugt und wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls bei der gegebenen Temperatur $c = 340\,\text{m s}^{-1}$ beträgt?

Lösung

Nach dem DOPPLERschen Prinzip gilt für die Frequenz, die vom Beobachter wahrgenommen wird, im vorliegenden Fall

$$\nu' = \frac{c + v}{c - u}\,\nu = \frac{(340 + 10)\,\text{m s}^{-1}}{(340 - 5)\,\text{m s}^{-1}} \cdot 500\,\text{s}^{-1} = \underline{522\,\text{s}^{-1}}.$$

118. Um welchen Betrag steigt der Schallpegel, wenn sich die physikalische Intensität eines Schalls auf das 5fache erhöht?

Lösung

Für den Lautstärkepegel eines beliebigen Schalls, der in der Einheit Dezibel ausgedrückt wird, gilt die Beziehung

$$L = 10 \lg \frac{J}{J_0},$$

in der $J_0 = 10^{-16}\,\text{W cm}^{-2}$ die Intensität der Schallquelle eines Normaltons von 1000 Hz darstellt, die gerade schon nicht mehr wahrgenommen werden kann. Wenn die Intensität eines beliebigen Schalls zunächst den Wert J_1 hat und dann auf $J_2 = 5\,J_1$ ansteigt, dann gilt für die Lautstärkepegel dieser Schallerscheinungen

$$L_1 = 10 \lg \frac{J_1}{J_0},$$

$$L_2 = 10 \lg \frac{J_2}{J_0} = 10 \lg \frac{5J_1}{J_0}.$$

Es ergibt sich also

$$L_2 - L_1 = 10 \left(\lg \frac{5J_1}{J_0} - \lg \frac{J_1}{J_0} \right) = 10 \lg 5 \approx \underline{7\,\text{dB}}.$$

Der Lautstärkepegel erhöht sich also annähernd um 7 Dezibel.

A Aufgaben

118. Berechnen Sie die Periodendauer der harmonischen Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m = 0{,}010$ kg, wenn die Kraft, welche die Schwingung dieses Massenpunktes verursacht, bei der Auslenkung $x = 0{,}03$ m den Wert $F = 0{,}05$ N aufweist.
119. Eine horizontale Platte führt in waagerechter Richtung eine harmonische Bewegung mit der Periodendauer $T = 5$ s aus. Ein Körper, der auf der Platte liegt, beginnt auf ihr zu gleiten, wenn die Amplitude der Schwingungen den Wert $x_0 = 0{,}5$ m erreicht. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen der Platte und dem auf ihr aufliegenden Körper?
120. Auf einer Platte liegt ein Körper mit der Masse $m = 2$ kg. Die Platte führt eine harmonische Bewegung mit der Periodendauer $T = 0{,}5$ s und der Amplitude $x_0 = 0{,}03$ m in vertikaler Richtung aus. Definieren Sie die Kraft F_{max}, mit welcher der Körper auf die Platte wirkt, und berechnen Sie die Amplitude dieser Kraft.
121. Das logarithmische Dekrement gedämpfter harmonischer Schwingungen habe den Wert $\delta = 0{,}02$. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich die Schwingungsamplitude nach 100 Schwingungen des Massenpunktes verringert.
122. Wie groß ist der Dämpfungskoeffizient der gedämpften harmonischen Schwingungen eines Massenpunktes, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender maximaler Auslenkungen des Massenpunktes zur gleichen Seite hin gleich 2 ist und wenn die Periodendauer der gedämpften Schwingung den Wert $T = 0{,}5$ s hat? Wie groß wäre die Periodendauer der ungedämpften Schwingung unter sonst gleichen Bedingungen?
123. Ein Eisenbahnwaggon hat einschließlich Last eine Masse $m = 50000$ kg. Es wurde festgestellt, daß der Waggon, der vier Federn hat, bei einer Geschwindigkeit $v = 12$ m s^{-1} heftig zu schwanken beginnt, was durch das Überfahren der Schienenstöße verursacht wird. Die Schienenlänge beträgt $l = 12{,}8$ m. Wie groß ist der Elastizitätskoeffizient der Federn, wenn wir eine Dämpfung vernachlässigen?
124. Ermitteln Sie die Amplitude der resultierenden harmonischen Bewegung, die durch Überlagerung zweier gleich gerichteter harmonischer Schwingungen von gleicher Periodendauer und den Amplituden 0,03 m und 0,05 m entsteht, deren Phasendifferenz 60° beträgt.
125. Zwei harmonische Schwingungen mit annähernd gleichen Frequenzen überlagern sich zu einer resultierenden Schwingung, die fünf Schwebungen in der Sekunde aufweist. Eine der Frequenzen hat den Wert $f_1 = 40$ s^{-1}. Wie groß ist die andere Frequenz?
126. Ermitteln Sie die Bahn der resultierenden Bewegung, die bei Überlagerung zweier senkrecht zueinander gerichteter harmonischer Schwingungen mit den Amplituden 0,03 m und 0,05 m gleicher Periodendauer und gleicher Phasen entsteht.
127. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Schallwelle beträgt unter bestimmten Bedingungen in Luft $v_1 = 330$ m s^{-1} und in Wasser $v_2 = 1450$ m s^{-1}. Die Normalenrichtung der Luftwelle schließt mit dem Wasserspiegel den Winkel $\varphi = 80°$ ein. Welcher Winkel entsteht beim Eintritt ins Wasser?
128. Eine stehende Welle entstand durch Überlagerung zweier Wellen mit der Frequenz $\nu = 475$ s^{-1}. Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt 1,5 m. Wie groß ist die Ausbreitungs-

geschwindigkeit der Welle in dem Medium?

129. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinal- und Transversalwellen in Stahl der Dichte $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, wenn der Zugelastizitätsmodul des betreffenden Stahls den Wert $E = 2 \cdot 10^5$ N mm^{-2} und der Schubmodul den Wert $G = 0{,}8 \times \times 10^5$ N mm^{-2} hat?

130. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft der Temperatur $t_1 = 10$ °C, wenn sie bei einer Temperatur $t_2 = 20$ °C den Wert $v_2 = 340$ m s^{-1} hat?

131. Ermitteln Sie das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (POISSONsche Zahl) $\varkappa = c_p/c_v$ für Helium, wenn bekannt ist, daß die Schallgeschwindigkeit im Helium bei Normalbedingungen $v = 940$ m s^{-1} beträgt.

132. Mit Hilfe der KUNDTschen Röhre soll die Schallgeschwindigkeit in Holz ermittelt werden. Ein Holzstab, mit dem in der KUNDTschen Röhre eine stehende Welle erzeugt wird, hat die Länge $l = 1{,}35$ m. Durch Messung wurde der Abstand benachbarter Knoten der stehenden Welle im Rohr zu 0,1 m bestimmt. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Holz, wenn sie bei gleicher Temperatur in Luft den Wert $v_L = = 340$ m s^{-1} hat?

133. Eine Lokomotive nähert sich einem Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m s^{-1}. Wie hoch ist der Grundton des Pfeifsignals der Lokomotive, den der in Ruhe befindliche Beobachter wahrnimmt, wenn ihn der Lokführer mit einer Frequenz $\nu = 300$ s^{-1} hört und wenn die Schallgeschwindigkeit in Luft unter den gegebenen Umständen den Wert $v_0 = 340$ m s^{-1} hat?

134. Ein Auto nähert sich einem Radfahrer. Beide bewegen sich relativ zur Straße mit den Geschwindigkeiten $u = 72$ km h^{-1} bzw. $v = 5$ m s^{-1} aufeinander zu. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des von der Autohupe ausgehenden Schalls hat bei gegebener Temperatur den Wert $c = 340$ m s^{-1}. Ermitteln Sie, auf das Wievielfache erhöht der Radfahrer den Ton des Hupsignals wahrnimmt.

135. Wenn wir eine Saite um 10 cm kürzen, erhöht sich ihre Grundfrequenz auf das 1,5fache. Berechnen Sie die ursprüngliche Länge der Saite, wenn in beiden Fällen ihre Spannung gleich groß ist.

136. Wie groß ist die physikalische Schallintensität, wenn der Lautstärkepegel des Schalls den Wert $L = 50$ dB annimmt?

2. *Wärmelehre und Molekularphysik*

2.1. Thermometrie und Kalorimetrie

Als **Wärme** bezeichnen wir das objektive Maß einer Eigenschaft von Körpern, die bei einer Berührung des Körpers in uns Wärmeempfindungen hervorruft. Es ist dies eine Zustandsgröße, und wir messen sie in der Weise, daß wir den einzelnen Wärmezuständen der Körper entsprechend einer bestimmten Vorschrift Zahlenwerte zuordnen. Auf diese Weise schaffen wir uns eine Temperaturskale.
In der Praxis messen wir Temperaturen gewöhnlich mit Hilfe des Wärmeausdehnungsvermögens von Flüssigkeiten oder der Wärmeausdehnung von Gasen.
Wenn das Volumen einer beliebigen Flüssigkeit, das sich unter dem Einfluß von Wärme vergrößert, bei der Gefriertemperatur des Wassers den Wert V_0, bei der Siedetemperatur des Wassers den Wert V_{100} und bei der gemessenen Temperatur den Wert V aufweist, dann wird die Temperatur wie folgt festgelegt:

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} 100\ {}^\circ\mathrm{C}. \qquad (1)$$

Wenn wir die Temperatur mit Hilfe von Gasdruckänderungen bei konstantem Volumen messen, wird die Temperatur – die sog. Gastemperatur – durch

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} 100\ {}^\circ\mathrm{C} \qquad (2)$$

bestimmt (p_0 Gasdruck bei der Gefriertemperatur des Wassers, p_{100} Gasdruck bei der Siedetemperatur, p Gasdruck bei der gemessenen Temperatur).
Oft erweist es sich als zweckmäßig, die Temperatur in der sog. absoluten oder KELVIN-Temperaturskale anzugeben. Der Zusammenhang zwischen der in der CELSIUS-Skale ausgedrückten Temperatur (t) und der in der KELVIN-Skale angegebe-

nen (T) wird durch die Beziehung definiert:

$$T = T_0 + t, \text{ wobei } T_0 = 273{,}15 \text{ K ist.}$$

Temperaturdifferenzen $\Delta T = \Delta t$ werden in der Einheit Kelvin (K) gemessen.
Mit der Änderung der Temperatur eines Körpers ändern sich auch dessen Abmessungen. Wir wollen hier die Längen-, Flächen- und Volumenausdehnung der Körper betrachten.
Bei der Temperatur 0 °C sei die Länge eines festen Stabes gleich l_0, dann wird – nach flüchtiger Betrachtung – bei einer Temperatur t seine Länge l durch die Beziehung

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

angegeben (α **Koeffizient der thermischen Längenausdehnung).** Er ist durch die Beziehung

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}$$

festgelegt.
Die Abhängigkeit des Volumens fester Körper V von ihrer jeweiligen Temperatur wird – ebenfalls annähernd – durch die Beziehung

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

angegeben (V_0 Körpervolumen bei 0 °C, t in CELSIUS-Skale gemessene Körpertemperatur und β **Koeffizient der thermischen Volumenausdehnung**);

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt}.$$

Bei Körpern, die aus isotropen Substanzen bestehen, hängt β mit dem Koeffizienten der thermischen Längenausdehnung durch die Beziehung zusammen:

$$\beta = 3\alpha.$$

Bei Flüssigkeiten ist nur die thermische Volumenausdehnung bedeutsam. Wenn V_0 das Flüssigkeitsvolumen in einem Gefäß bei der Temperatur t_0 und V das Volumen bedeutet, das von der Flüssigkeit bei der Temperatur t eingenommen wird, dann gibt der Ausdruck

$$\beta_s = \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{t - t_0}$$

nur den Durchschnittswert des scheinbaren Koeffizienten der Volumenänderung an, denn bei der Temperaturänderung ändert sich natürlich auch das Volumen des Gefäßes. Wenn β_G den Koeffizienten der Volumenausdehnung des Gefäßes bedeutet,

dann ist der tatsächliche Wert des durchschnittlichen Koeffizienten der Volumenausdehnung der Flüssigkeit bestimmt durch

$$\beta = \beta_S + \beta_G.$$

Bei gegenseitiger Berührung zweier oder mehrerer Körper von ungleicher Temperatur tritt nach einer bestimmten Zeit Temperaturausgleich ein. In genauer Übereinstimmung mit unserer Beobachtung erklären wir uns diesen Sachverhalt mit der Vorstellung, daß Körper mit höherer Temperatur *Wärme* an solche mit geringerer Temperatur abgeben, und zwar so lange, bis ihre Temperaturen sich ausgeglichen haben.

Wenn ein System von Körpern von seiner Umgebung thermisch vollkommen isoliert ist und wenn die einzelnen Körper des Systems Energie untereinander nur durch Wärme austauschen können, dann ist die Summe der jeweils abgegebenen gleich der Summe der aufgenommenen Wärme (*Gesetz von der Erhaltung der Wärme*).

Über die physikalische Natur der Wärme vgl. 2.3.

Wenn wir unter der **Wärmekapazität** eines Stoffes C die zu seiner Erwärmung um 1 K notwendige Wärme und unter der **spezifischen Wärmekapazität** c die Wärmekapazität einer Masseeinheit des betreffenden Stoffes verstehen, dann gilt

$$c = \frac{C}{m},$$

und die Wärmemenge, die ein Körper bei Änderung seiner Temperatur von t_1 auf t_2 aufnimmt, ist durch die Beziehung

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} mc \, \mathrm{d}t$$

gegeben, in der m die Masse des Stoffes bedeutet.

Wenn die spezifische Wärmekapazität konstant ist, so ergibt sich

$$Q = mc\,(t_2 - t_1).$$

Die Wärmemenge, die ein Stoff bei Änderung seiner Temperatur von t_1 auf t_2 abgibt, ist durch die Beziehung

$$Q' = -Q = mc\,(t_1 - t_2)$$

gegeben. Wärmemengen werden in Kalorimetern gemessen. Als den *Wasserwert* eines Kalorimeters bezeichnen wir die Wärmekapazität des gesamten inneren Teils des Kalorimeters, dessen Temperatur sich beim Meßvorgang verändert. Wenn die Wassermasse im Kalorimeter mit m_0 angegeben wird, ihre spezifische Wärmekapa-

zität c_0 ist und die Massen, die sich bei der Messung erwärmen, $m_1, m_2, m_3, \dots$ sind, deren spezifische Wärmekapazitäten jeweils $c_1, c_2, c_3, \dots$ betragen, dann ist der Wasserwert des Kalorimeters durch die Beziehung

$$C_W = m_0 c_0 + m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots$$

gegeben.

B Beispiele

119. Ein bestimmtes Volumen des Gases Wasserstoff ist in einem Gefäß eingeschlossen, dessen Eigenvolumen konstant ist. Der Wasserstoff habe in tauendem Eis einen Druck von $p_0 = 1000$ Torr. Wenn wir das Gefäß in ein Warmbad tauchen, so steigt der Druck des in ihm eingeschlossenen Wasserstoffs um den Betrag $\Delta p = 217$ Torr an. Berechnen Sie die Temperatur des Warmbades.

Lösung

Mit Hilfe der beschriebenen Vorrichtung kann man die Temperatur auf Grund der Druckänderung des bei konstantem Volumen gehaltenen Wasserstoffs bestimmen. Wenn der Wasserstoff im Dampf von siedendem Wasser bei einem Druck $b_0 = 760$ Torr den Druck p_{100} aufweist, dann wird die Temperatur – angegeben in °C – errechnet aus

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0}\, 100\ °\text{C} = \frac{\Delta p}{p_0}\, \frac{100\ °\text{C} \cdot p_0}{p_{100} - p_0}.$$

Durch Messen wurde ermittelt, daß der Ausdruck

$$\frac{100\ °\text{C} \cdot p_0}{p_{100} - p_0}$$

für alle ausreichend verdünnten Gase den gleichen Wert $1/\gamma = 273{,}15$ °C ergibt. Daher findet man

$$t = \frac{\Delta p}{p_0}\, \frac{1}{\gamma};$$

$$t = \frac{217\ \text{Torr} \cdot 273{,}15\ °\text{C}}{1000\ \text{Torr}} = \underline{59{,}3\ °\text{C}}.$$

120. Ein in schmelzendes Eis getauchtes Thermometer zeigt eine Temperatur von $t_1 = 0{,}3$ °C an, in den Dampf siedenden Wassers gehalten jedoch eine Temperatur von $t_2 = 101{,}5$ °C. Wenn wir es in den Dampf von siedendem Äthylalkohol halten, weist es eine Temperatur $t_n = 79{,}7$ °C aus. Berechnen Sie, wie groß die tatsächliche Siedetemperatur des Äthylalkohols ist (Angabe in °C), wenn bei jeder Temperaturablesung ein Druck $b_0 = 760$ Torr herrscht.

Lösung

Die Differenz $t_2 - t_1$, die am Thermometer abgelesen wurde, entspricht einer tatsächlichen Temperaturänderung um 100 K. Wenn das Thermometer in ein Medium von der Temperatur t gebracht wird, dann ändert sich die Anzeige t_1 auf dem Thermometer um den Wert

$$\frac{t_2 - t_1}{100\ °\mathrm{C}}\, t,$$

und wir lesen auf ihm eine Temperatur vom Betrag

$$t_n = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{100\ °\mathrm{C}}\, t$$

ab, woraus wir die gesuchte tatsächliche Temperatur des siedenden Äthylalkohols wie folgt bestimmen:

$$t = 100\ °\mathrm{C}\,\frac{t_n - t_1}{t_2 - t_1} = 100\ °\mathrm{C}\,\frac{79{,}7\ °\mathrm{C} - 0{,}3\ °\mathrm{C}}{101{,}5\ °\mathrm{C} - 0{,}3\ °\mathrm{C}} = \underline{78{,}5\ °\mathrm{C}}.$$

121. Ein Thermometer wurde mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie, für welche Temperaturen in der CELSIUS-Skale im Bereich zwischen 0 und 10 °C das Thermometer gleiche Werte anzeigen wird. Die Abhängigkeit des Wasservolumens von der Temperatur kann in diesem Bereich durch die Beziehung

$$V = V_0(1 + at + bt^2) \tag{1}$$

ausgedrückt werden ($a = 6{,}105 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, $b = -7{,}733 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-2}$, V_0 Wasservolumen bei 0 °C).

Lösung

Bei gleichen Wasservolumina wird das Thermometer die gleichen Werte anzeigen. Da die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur $[V(t)]$ quadratisch ist, existieren zwei Temperaturwerte t_1 und t_2, bei denen das Wasser im Temperaturbereich zwischen 0 °C und 10 °C ein gleiches Volumen hat.
Durch Umformen von Gl. (1) erhalten wir die quadratische Gleichung

$$t^2 + \frac{a}{b}\, t + \frac{1 - \dfrac{V}{V_0}}{b} = 0.$$

Die Wurzeln t_1 und t_2 entsprechen der Beziehung

$$t_1 + t_2 = -\frac{a}{b} = \underline{7{,}9\ \mathrm{K}}.$$

Zu jeder Temperatur t_1 gibt es im Temperaturbereich zwischen 0 und 7,9 °C einen Temperaturwert t_2, der durch die Beziehung $t_2 = 7{,}9\ °C - t_1$ bestimmt wird. Bei dieser Temperatur zeigt das Wasserthermometer den gleichen Wert an.

122. Bei einem Messingpendel beträgt bei einer Temperatur $t_1 = 10\ °C$ die Zeit für eine Schwingung $\tau_1 = 1$ s. Um welchen Betrag ändert sich diese Zeit, wenn die Temperatur auf $t_2 = 25\ °C$ ansteigt? Um wieviel würde eine Uhr im Laufe eines Tages nachgehen, die mit einem derartigen Pendel angetrieben würde?

Lösung

Die Zeit für eine Schwingung (eine halbe Periodendauer) eines physikalischen Pendels ist durch die Beziehung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

bestimmt, in der J das Trägheitsmoment des Pendels bezüglich seiner Schwingungsachse, mg das Gewicht des Pendels und a den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse darstellt.
Wenn wir voraussetzen, daß in unserem Beispiel das angeführte Pendel die Form eines homogenen Stabes mit überall gleichem Querschnitt hat, daß seine Länge l beträgt und daß es um die durch den Endpunkt des Stabes senkrecht zu seiner Länge gerichtete Achse schwingt, dann beträgt das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

$$J = \frac{ml^2}{3}\,; \quad a = \frac{l}{2}.$$

Für die Zeit einer Schwingung kann man dann schreiben

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Wenn das Pendel bei einer Temperatur t_1 die Länge l_1 und bei einer anderen Temperatur t_2 die Länge l_2 hat, dann ergibt sich für den Quotienten der Schwingungszeiten

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (1)$$

Für nicht allzu hohe Temperaturen gelten weiter die Beziehungen

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1),$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2),$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \approx 1 + \alpha(t_2 - t_1).$$

Nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir als Zeit für eine Schwingung

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{1 + \alpha(t_2 - t_1)} = 1\,\text{s}\sqrt{1 + 19 \cdot 10^{-6}\,\text{K}^{-1}\,15\,\text{K}} = \underline{1{,}00014\,\text{s}}.$$

Ein Sekundenpendel vollführt bei $t_1 = 10$ °C während eines Tages $n = 86400$ Schwingungen, dagegen bei einer Temperatur von $t_2 = 25$ °C nur

$$n' = \frac{86400}{1{,}00014} = 86388$$

Schwingungen. Demzufolge wird die Uhr täglich um eine Differenz $\underline{n - n' = 12\,\text{s}}$ zurückbleiben.

123. Zwei gleiche Metallbänder der Dicke $d = 0{,}2$ cm sind miteinander so verschweißt, daß sie ein ebenes Plättchen bilden, wenn ihre Temperatur gerade $t_0 = 0$ °C beträgt. Wenn wir das aus einem Kupfer- und einem Eisenband bestehende Plättchen aber erwärmen, so deformiert es sich zur Gestalt eines Kreisbogens (Bild 83). Berechnen Sie den Radius seiner Krümmung, wenn das Plättchen auf eine Temperatur von $t = 400$ °C erhitzt worden ist.

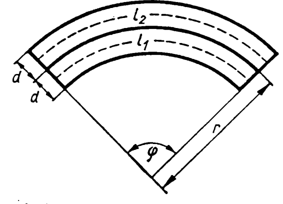


Bild 83

Lösung

Wenn bei der Temperatur $t_0 = 0$ °C die Länge der Bänder den Wert l_0 hat, dann wird das Kupferband nach dem Erhitzen auf die Temperatur t die Länge

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 t)$$

und das Eisenband

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 t)$$

mit

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t} = 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\,t$$

haben. Wie aus Bild 83 hervorgeht, stellen die Strecken l_1 und l_2 Kreisbögen mit den Radien $r - d/2$ und $r + d/2$ dar. Daher messen wir, wenn der Zentriwinkel mit φ angegeben wird, im Bogenmaß

$$l_2 = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi; \quad l_1 = \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi$$

und

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{r + \dfrac{d}{2}}{r - \dfrac{d}{2}} \approx 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\,t,$$

woraus wir nach Umformung für den Radius die Beziehung

$$r = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)\,t} + \frac{d}{2}$$

erhalten. Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$r = \frac{0{,}2\ \text{cm}}{(17 - 12)\,10^{-6}\ \text{K}^{-1}\ 400\ \text{K}} + \frac{0{,}2\ \text{cm}}{2} = \underline{1{,}001\ \text{m}}.$$

124. Ein Stahlstab mit dem Querschnitt $A = 2\ \text{cm}^2$ soll von der Temperatur $t_0 = 0$ °C auf eine Temperatur $t = 50$ °C erhitzt und danach wieder auf seine ursprüngliche Temperatur abgeschreckt werden. Berechnen Sie, mit welcher in Achsrichtung angreifenden minimalen Kraft man auf den Stab einwirken muß, damit er sich bei der Abkühlung nicht verkürzt ($E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{N mm}^{-2}$). Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß sich der Elastizitätsmodul mit veränderter Temperatur nicht ändert.

Lösung

Wenn sich die Temperatur um den Betrag Δt ändert, dann erfährt der Stab eine Längenänderung der Größe

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t. \tag{1}$$

Um den gleichen Betrag würde er sich bei der nachfolgenden Abschreckung wieder zusammenziehen. Um beim Abschrecken diese Verkürzung zu unterbinden, muß man in Richtung seiner Achse mit einer Kraft einwirken, die ihrerseits allein die gleiche Längenänderung Δl hervorrufen würde.
Nach dem HOOKEschen Gesetz ist

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A},$$

wobei E der Zugelastizitätsmodul des Stabes ist. Daraus finden wir

$$F = \frac{EA}{l_0}\,\Delta l,$$

und wenn wir für Δl die rechte Seite der Gl. (1) einsetzen, folgt

$$F = EA\Delta t\alpha = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{N mm}^{-2} \cdot 2\ \text{cm}^2 \cdot 50\ \text{K} \cdot 12 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1} = \underline{25200\ \text{N}}.$$

125. Berechnen Sie, wie groß die Dichte des Quecksilbers bei 0 °C und bei 100 °C ist, wenn es bei 10 °C die Dichte $\varrho_{10} = 13{,}57\ \text{g cm}^{-3}$ hat.

Lösung

Das Volumen einer bestimmten Quecksilbermenge der Masse m sei bei 0 °C gleich V_0 gesetzt, und bei einer Temperatur t sei es V_t. Dann können wir schreiben

$$m = V_t\,\varrho_t; \quad m = V_0\,\varrho_0.$$

Aus dem Vergleich beider Ausdrücke resultiert

$$\varrho_t = \frac{V_0}{V_t}\varrho_0. \tag{1}$$

Bei nicht allzu hohen Temperaturen wird die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur annähernd durch die Beziehung

$$V_t = V_0(1 + \beta t)$$

ausgedrückt.
Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$\varrho_t = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}.$$

Daraus ermittelt man

$$\varrho_0 = \varrho_t(1 + \beta t),$$

und es ergibt sich

$$\varrho_0 = 13{,}57\ \text{g cm}^{-3}\ (1 + 18{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 10) = \underline{13{,}59\ \text{g cm}^{-3}}$$

und daher

$$\varrho_{100} = \frac{13{,}59\ \text{g cm}^{-3}}{1 + 18{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 100} = \underline{13{,}34\ \text{g cm}^{-3}}.$$

126. Ein Glasgefäß hat leer die Masse $m_0 = 0{,}1$ kg. Mit Quecksilber gefüllt, hat es bei einer Temperatur von 0 °C die Masse $m_1 = 1{,}431$ kg. Wenn wir das Gefäß auf die Temperatur $t = 40$ °C erwärmen, fließt ein Teil des darin enthaltenen Quecksilbers aus, so daß das Gefäß mit dem darin verbleibenden Quecksilber eine Masse von $m_2 = 1{,}423$ kg annimmt. Berechnen Sie, wie groß der tatsächliche Koeffizient der Volumenausdehnung des Quecksilbers ist, wenn der Längenausdehnungskoeffizient des Glases mit α_G angegeben wird.

Lösung

Der Zusammenhang zwischen dem tatsächlichen Wert β und dem scheinbaren Wert β_S des Volumenausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers ist durch die Gleichung

$$\beta = \beta_S + \beta_G \tag{1}$$

gegeben, in der β_G den Volumenausdehnungskoeffizienten des Glases bedeutet.
Wenn V bzw. V_0 die Volumina angeben, die das Quecksilber bei den Temperaturen t bzw. t_0 annimmt, dann ist die Beziehung

$$\beta_S = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{\Delta V}{V_0 t} \tag{2}$$

erfüllt. Bei der Temperatur t_0 nimmt das Quecksilber ein Volumen

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} = \frac{m_1 - m_0}{\varrho_0} \tag{3}$$

ein. Bei einer Temperaturänderung von t_0 auf t wird die Volumenänderung des Quecksilbers

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\Delta m}{\varrho}$$

sein, wobei Δm die aus dem Gefäß ausgeflossene Quecksilbermasse bedeutet. Unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Dichte des Quecksilbers (siehe auch vorhergehendes Beispiel!) finden wir

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

und

$$\Delta V = \frac{m_1 - m_2}{\varrho_0} (1 + \beta t). \tag{4}$$

Wenn wir die Gln. (3) u. (4) in die Gln. (2) und (1) einsetzen, erhalten wir

$$\beta = \frac{\dfrac{m_1 - m_2}{\varrho_0} (1 + \beta t)}{\dfrac{m_1 - m_0}{\varrho_0} t},$$

woraus nach einer einfachen Umformung für den gesuchten Koeffizienten folgende Beziehung gefunden wird:

$$\beta = \frac{m_1 - m_2 + \beta_G t (m_1 - m_0)}{(m_2 - m_0) t}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $\beta_G = 3\alpha_G$, ergibt die Heranziehung der gegebenen Werte

$$\beta = \frac{1{,}431 \text{ kg} - 1{,}423 \text{ kg} + 30 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}\, 40 \text{ K}\, (1{,}431 \text{ kg} - 0{,}1 \text{ kg})}{(1{,}423 \text{ kg} - 0{,}1 \text{ kg})\, 40 \text{ K}};$$

$$\underline{\beta = 18{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}.$$

127. Bei einer Temperatur von $t_1 = 20$ °C wird mittels eines Barometers, das eine Meßvorrichtung aus Messing enthält, ein Luftdruck von $b_1 = 750$ Torr gemessen. Die Meßvorrichtung zeigt bei 0 °C genau an. Berechnen Sie, welchen Luftdruck das benutzte Instrument bei 0 °C anzeigen würde.

Lösung

Bei einer Temperaturänderung ändert sich die Dichte des Quecksilbers und damit auch die Höhe der Quecksilbersäule, die sich mit dem herrschenden Luftdruck im Gleichgewicht befindet. Es ändert sich aber auch die Länge der verwendeten Anzeigeskale. Deshalb reduzieren wir gewöhnlich den am Barometer abgelesenen Wert auf die Bezugstemperatur 0 °C.

Wenn die tatsächliche Höhe der Quecksilbersäule bei der Temperatur t den Wert b_1^* und bei 0 °C den Wert b_0 hat, dann ist die Beziehung

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \varrho g$$

erfüllt, worin die Bedingung enthalten ist, daß die Drücke bei beiden Temperaturen gleich sein müssen. Die Temperaturabhängigkeit der Quecksilberdichte ist durch die Formel

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

gegeben. Deshalb finden wir

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} g. \tag{1}$$

Unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Meßvorrichtung des Barometers in ihrer Länge temperaturabhängig ist und nur bei der Temperatur 0 °C genau stimmt, gehört zum abgelesenen Wert b_1 bei der Temperatur t_1 der richtige Wert b_1^* entsprechend der Beziehung

$$b_1^* = b_1 + b_1 \alpha t_1 .$$

Nach Einsetzen des gefundenen Wertes anstelle b_1^* in Gl. (1) erhalten wir für den reduzierten Druckwert

$$b_0 = b_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \beta t_1} \approx b_1[1 + (\alpha - \beta)\, t_1].$$

Damit wir die reduzierte Druckangabe b_0 erhalten, müssen wir an dem gemessenen Wert b_1 eine Korrektur vornehmen, die besagt:

$$\Delta b = b_1(\alpha - \beta)\, t_1 .$$

Diese Korrektur hat in Zahlen ausgedrückt den Wert

$$\Delta b = 750 \text{ Torr } (19 \cdot 10^{-6} - 182 \cdot 10^{-6})\, \text{K}^{-1}\, 20 \text{ K} = -2{,}41 \text{ Torr},$$

so daß wir dann weiter finden

$$b_0 = b_1 + \Delta b = \underline{747{,}6 \text{ Torr}} = 746{,}6 \cdot 133{,}3224 \text{ Pa} = \underline{99466 \text{ Pa}}.$$

128. In ein Wasserbad der Masse $m = 6{,}7$ g wird ein Thermometer eingetaucht, das nach einem Temperaturanstieg von $\Delta t = 14{,}6$ K eine endgültige Temperatur von $t_1 = 32{,}4$ °C anzeigt. Der Wasserwert des Thermometers hat die Größe $C_W = 0{,}46 \text{ cal K}^{-1} = 1{,}93 \text{ J K}^{-1}$. Berechnen Sie die Temperatur, die das Wasser vor Beginn der Messung hatte.

Lösung

Das Thermometer mit dem Wasserwert C_W erwärmte sich nach dem Eintauchen um die Temperatur Δt und nahm dabei die Wärmemenge

$$Q = C_W \Delta t$$

auf. Dabei kühlte sich das Wasser von der ursprünglichen Temperatur t auf die gemessene Temperatur t_1 ab. t_1 ist die nach Temperaturausgleich vom Thermometer angezeigte gleiche Temperatur von Wasser und Thermometer. Zur Erwärmung des Thermometers gab das Wasser die Wärmemenge

$$Q' = mc(t - t_1)$$

ab. Unter Voraussetzung einer idealen Wärmeisolation gilt nach dem Gesetz über die Erhaltung der Wärme

$$Q = Q'$$

oder

$$mc(t - t_1) = C_w \Delta t,$$

woraus wir finden

$$t = \frac{C_W \Delta t + mct_1}{mc},$$

d. h.,

$$t = \frac{0{,}46\ \text{cal K}^{-1} \cdot 14{,}6\ \text{K} + 6{,}7\ \text{g} \cdot 1\ \text{cal g}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 32{,}4\ \text{K}}{6{,}7\ \text{g} \cdot 1\ \text{cal g}^{-1}\ \text{K}^{-1}} = \underline{33{,}4\ °\text{C}.}$$

129. Es soll die spezifische Wärmekapazität von Silber bestimmt werden. Dazu wird ein Silberstück ($m_1 = 100$ g) auf $t_1 = 100$ °C erhitzt und in das Wasserbad eines Messingkalorimeters gelegt. Zusammen mit dem Mischer hat der Innenteil des Kalorimeters eine Masse $m_2 = 124$ g, die darin enthaltene Wassermenge hat die Masse $m_3 = 1000$ g; die Anfangstemperatur des Wassers betrage $t_3 = 17$ °C. Nach Einbringen des Silbers stabilisiert sich die Gesamttemperatur auf den Wert $t_0 = 17{,}5$ °C. Wie groß ist demnach die spezifische Wärmekapazität des Silbers?

Lösung

Die Temperatur des Silbers nimmt nach Einbringen ins Kalorimeter vom Wert t_1 auf t_0 ab, wobei das Silber die Wärme abgibt

$$Q' = m_1 c_1 (t_1 - t_0).$$

Wir nehmen die spezifische Wärmekapazität des Silbers hierbei als konstant an. Kalorimeter und Zubehörteile sowie das darin enthaltene Wasser nehmen Wärme auf, wobei die Temperatur von t_3 auf t_0 ansteigt. Wenn C_W der Wasserwert des Kalorimeters ist, dann mußte es bei Erwärmung von t_3 auf t_0 die Wärmemenge aufnehmen

$$Q = C_W(t_0 - t_3).$$

Wenn wir unser System als von der Umwelt thermisch isoliert betrachten, gilt entsprechend dem Gesetz von der Erhaltung der Wärme

$$Q = Q',$$

was nach Einsetzen der entsprechenden Größen ergibt

$$m_1 c_1 (t_1 - t_0) = C_W(t_0 - t_3).$$

Daraus wiederum entnehmen wir

$$c_1 = \frac{C_W(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}.$$

Da der Wasserwert des Kalorimeters, der die Wärmekapazität von Kalorimeterinnengefäß plus Mischer plus Wasser darstellt, die Größe $C_W = m_2c_2 + m_3c_3$ hat, wobei c_2 und c_3 die spezifischen Wärmekapazitäten von Messing und Wasser bedeuten, können wir auch schreiben

$$c_1 = \frac{(m_2c_2 + m_3c_3)(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir somit

$$c_1 = \frac{(124 \cdot 0{,}093 + 1000 \cdot 1)\,\text{g cal g}^{-1}\,\text{K}^{-1}\,(17{,}5 - 17{,}0)\,\text{K}}{100\,\text{g}\,(100 - 17{,}5)\,\text{K}} =$$
$$= \underline{0{,}0613\,\text{cal g}^{-1}\,\text{K}^{-1} = 257\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}}.$$

130. In einem wärmeisolierten Gefäß bringen wir Wasserdampf der Masse m_1 und der Temperatur $t_1 = 100$ °C mit Wasser der Masse m_0 und der Temperatur t_0 und mit Eis der Masse m und der Temperatur $t_2 = 0$°C in unmittelbare Berührung. Nach Ablauf einer bestimmten Zeit gehen alle drei Komponenten in die flüssige Phase über. Wie groß ist die sich einstellende Endtemperatur? Die Verdampfungswärme des Wassers sei mit r, die Schmelzwärme des Eises mit q gegeben. Es sei vorausgesetzt, daß die Wärmekapazität des Gefäßes vernachlässigt werden kann.

Lösung

Beim Entstehen einer einzigen Phase, der Flüssigkeitsphase, kommt es im Gefäß zu folgenden Umwandlungen:

a) Der Wasserdampf mit der Temperatur t_1 kondensiert zu Wasser gleicher Temperatur, wobei die Wärme $Q'_{1,0} = m_1r$ frei wird. Das so gebildete Wasser der Temperatur t_1 kühlt sich auf die Endtemperatur t ab und gibt dabei eine Wärme vom Betrag $Q'_{1,1} = m_1c(t_1 - t)$ ab.

b) Das Eis der Temperatur t_2 schmilzt zu Wasser gleicher Temperatur, wozu ein von außen zuzuführender Wärmebetrag der Größe $Q_{2,0} = m_2q$ benötigt wird. Das so gebildete Wasser erwärmt sich von der Temperatur t_2 auf die Endtemperatur t, wozu abermals Wärme vom Betrag $Q_{2,1} = m_2c(t - t_2)$ benötigt wird.

c) Das Wasser der Temperatur t_0 verändert seine Temperatur auf t, wozu eine Wärmemenge $Q_3 = m_0c(t - t_0)$ aufgebracht werden muß.

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Wärme ist

$$Q'_{1,0} + Q'_{1,1} = Q_{2,0} + Q_{2,1} + Q_3$$

oder

$$m_1r + m_1c(t_1 - t) = m_2q + m_2c(t - t_2) + m_0c(t - t_0).$$

Daraus erhalten wir nach kurzer Umformung

$$t = \frac{m_1ct_1 + m_2ct_2 + m_0ct_0 + m_1r - m_2q}{m_1c + m_2c + m_0c}.$$

A Aufgaben

137. Ein Quecksilberthermometer ist mit einer Millimeterskale versehen. In schmelzendes Eis getaucht, liegt der Meniskus der Quecksilbersäule bei einer Höhe von 20 mm. In dem aus siedendem Wasser bei atmosphärischem Normaldruck aufsteigenden Dampf liegt er bei 60 mm. Wie hoch ist die in Grad Celsius ausgedrückte Temperatur, wenn der Meniskus bei a) 26 mm, b) 76 mm und c) 0 mm Höhe liegt?
138. Ein Messing- und ein Aluminiumstab haben bei der Temperatur von 20 °C die gleiche Länge von einem Meter. Wie groß ist ihre Längendifferenz, wenn wir beide auf 100 °C erwärmt haben?
139. Eine Messingkugel hat bei $t_1 = 15$ °C einen Durchmesser $d = 4$ cm. Berechnen Sie den Durchmesser einer Öffnung, durch welche die auf eine Temperatur $t = 555$ °C erhitzte Kugel gerade noch passen würde.
140. Die Entfernung zweier Punkte wurde mittels Stahlmeßbands bei $t_1 = 30$ °C zu $l_1 = 186$ m bestimmt. Wie groß ist ihr tatsächlicher Abstand, wenn das Meßband für eine Temperatur $t_0 = 18$ °C geeicht wurde?
141. Das Rad einer Lokomotive hat bei der Temperatur 0 °C einen Radius der Größe $r_0 = 1$ m. Wie groß ist die Differenz der auf einer Strecke $l = 100$ km vollführten Raddrehungen, wenn die Strecke einmal im Sommer bei der Temperatur $t_1 = 25$ °C und einmal im Winter bei der Temperatur $t_2 = -25$ °C durchfahren wird? Der Längenausdehnungskoeffizient des Radwerkstoffs habe die Größe $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}.
142. Eine homogene Eisenstange der Masse $m = 3$ kg ist bei 8 °C genau einen Meter lang. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich das Trägheitsmoment dieser Stange bezüglich einer senkrecht zur Stange durch den Endpunkt gehenden Drehachse ändert, wenn die Stange auf 100 °C erwärmt wird.
143. Um welchen Betrag müßte der auf einem Quecksilbervolumen lastende Außendruck erhöht werden, damit sich das Quecksilbervolumen bei einer Erwärmung von 0 °C auf 10 °C nicht verändert? Der Kompressibilitätskoeffizient des Quecksilbers beträgt $\varkappa = 39 \cdot 10^{-6}$ atm^{-1}.
144. Eine an beiden Enden befestigte Stahlsaite vom Durchmesser $d = 1$ mm übt bei einer Temperatur $t_1 = 28$ °C auf ihre Befestigungen eine Kraft $F_1 = 100$ N aus. Berechnen Sie, mit welcher Kraft sich die Saite spannt, wenn sie bei konstant gehaltener Länge auf eine Temperatur $t_2 = -12$ °C abgekühlt wird.
145. Ein Eisenstab berührt mit seinen beiden Enden feste Wände. Berechnen Sie, um welchen Betrag sich seine Temperatur erhöhen muß, damit er auf die Wände einen Druck der Größe $\sigma = 4{,}9$ N mm^{-2} ausübt.
146. Zwei gleichartige Thermometer sind bei einer Temperatur von 0 °C mit jeweils gleichen Quecksilber- und Spiritusmengen gefüllt worden. Bestimmen Sie den Zusammenhang der beiden Flüssigkeitssäulen, die jeweils einem Grad Celsius auf der Quecksilber- und der Spiritusskale entsprechen, wenn die zugehörigen Volumenausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers, des Spiritus

sowie der Längenausdehnungskoeffizient des Glases bekannt sind.

147. Ein Glaspyknometer mit dem Volumen $V_0 = 15\ cm^3$ wird bei einer Temperatur $t_0 = 0\ °C$ mit Quecksilber gefüllt. Wenn die Temperatur des Systems auf $t_1 = 100\ °C$ erhöht wird, fließt aus dem Pyknometer Quecksilber vom Volumen $\Delta V = 234\ mm^3$ aus. Berechnen Sie den Raumausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers.

148. Ein Eisenquader schwimmt bei 0 °C so in Quecksilber, daß er zu $^5/_8$ seiner Höhe eingetaucht ist. Bestimmen Sie, um welchen Betrag sich die Eintauchtiefe verändert, wenn die Temperatur auf 100 °C erhöht wird.

149. Ein Behälter enthält 35 kg Härteöl der Temperatur 30 °C. Es wird ein Stahlgegenstand eingetaucht, der vorher auf eine Temperatur von 800 °C erhitzt worden war, worauf sich eine Endtemperatur von 58 °C einstellt. Berechnen Sie die Masse des zu härtenden Gegenstandes.

150. Aus einem Schmelzofen entnehmen wir eine Platinkugel von 100 g Masse und legen sie sofort in ein Messingkalorimeter von 200 g Masse, in dem 1 kg Wasser mit einer Temperatur von 10 °C enthalten ist. Bestimmen Sie die Hochofentemperatur, wenn sich nach Einbringen der Kugel ins Kalorimeter eine Endtemperatur von 14 °C einstellte.

151. In ein Messingkalorimeter von 100 g Masse, das 250 g Wasser mit einer Temperatur von 10 °C enthält, legen wir gleichzeitig einen Eisenzylinder von 50 g Masse und der Temperatur 150 °C, einen Aluminiumzylinder von 30 g Masse und der Temperatur 90 °C sowie einen Bleizylinder von 30 g Masse und der Temperatur 75 °C. Wie hoch wird die sich einstellende endgültige Mischtemperatur im Kalorimeter sein?

152. Welche Menge Eis mit einer Temperatur von 0 °C muß man mit 6 g Wasser von 90 °C mischen, damit die resultierende Temperatur in einem Kalorimeter, dessen Wärmekapazität vernachlässigt wird, genau 5 °C beträgt?

153. Ein großes Thermometer, das auf 100 °C erhitzt worden ist, wird in eine größere Menge schmelzenden Eises getaucht. Während des Wärmeausgleichs auf eine Temperatur von 0 °C schmilzt eine Eismenge der Masse $m_0 = 125$ g. Danach wird das solcherart abgekühlte Thermometer in ein wärmeisoliertes Gefäß gebracht, in dem sich Quecksilber der Masse $m_1 = 5$ kg bei der Temperatur $t_1 = 15\ °C$ befindet. Welche Temperatur zeigt das Thermometer nach dem im Quecksilber erfolgenden Wärmeausgleich an? Die Wärmekapazität des Gefäßes kann vernachlässigt werden.

154. In 1 kg Wasser von 35 °C sind 20 kg Quecksilber der Temperatur 110 °C sowie eine unbekannte Menge Eis von −3 °C gegeben worden. Nach völligem Schmelzen des Eises stellt sich eine Endtemperatur von 60 °C ein. Die Wärmekapazität des Gefäßes sei vernachlässigt. Welche Menge Eis wurde zugefügt?

155. Ein Kupferkalorimeter der Masse $m_0 = 120$ g enthält die Masse $m_1 = 200$ g Wasser der Temperatur $t_1 = 18\ °C$. Nach Einlassen von Wasserdampf der Masse $m_2 = 20$ g und der Temperatur $t_2 = 100\ °C$ stellt sich eine Endtemperatur $t = 71{,}6\ °C$ ein. Wie groß ist die Kondensationswärme des Wassers?

156. In einem Kupferkalorimeter von 200 g Masse befinden sich bei 0 °C, also gleicher Temperatur, 300 g Wasser und 20 g Eis. Berechnen Sie, wieviel Wasserdampf von 150 °C man dem Kalorimeter zuführen muß, damit sich darin nach gründlichem Mischen eine Endtemperatur von 40 °C einstellt! Die spezifische Wärmekapazität des Wasserdampfes beträgt bei konstantem Druck $c_p = 2{,}01\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$.

2.2. Ideale Gase – Kinetische Gastheorie

Der momentane Zustand, in dem sich eine bestimmte Menge eines Gases befindet, ist durch drei miteinander zusammenhängende **Zustandsgrößen** bestimmt: den *Druck* p, das *Gasvolumen* V und die *Temperatur* T.
Wenn man voraussetzt, daß von den genannten drei Zustandsgrößen eine konstant bleibt, dann hängen die beiden jeweils anderen gemäß dem BOYLE-MARIOTTEschen und dem GAY-LUSSACschen Gesetz wechselseitig voneinander ab. Das BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz besagt:
Bei konstanter Gastemperatur ist das Produkt aus dem Druck p und dem Volumen V einer bestimmten Gasmenge praktisch konstant, also

$$pV = p_0 V_0 = \text{const.}$$

Dabei ist p_0 der Druck und V_0 das Volumen beispielsweise für einen Anfangszustand.
Entsprechend dem Gesetz von GAY-LUSSAC wird die Abhängigkeit des Volumens einer bestimmten Gasmenge von seiner Temperatur bei konstant gehaltenem Druck durch die Gleichung

$$V = \frac{V_0 T}{T_0}$$

und die Abhängigkeit des Druckes von der Temperatur – diesmal bei konstant gehaltenem Volumen – durch die Gleichung

$$p = \frac{p_0 T}{T_0}$$

ausgedrückt (V_0 Volumen, p_0 Druck, T_0 Temperatur). Die Temperatur wird in Graden der KELVIN-Skale angegeben.

Die gegenseitige Abhängigkeit aller drei Zustandsgrößen wird durch die **Zustandsgleichung** ausgedrückt. Entsprechend dieser Gleichung gilt:

Das Produkt aus Druck und Volumen, geteilt durch die absolute Temperatur, hat für eine bestimmte Gasmenge einen konstanten Wert, und zwar

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const.}$$

p_0, V_0 und T_0 sind die Werte für Druck, Volumen und absolute Temperatur beispielsweise für den Anfangszustand.

Die Konstante $\frac{p_0 V_0}{T_0}$ hat – bezogen auf ein Mol[1]) Gas – für alle Gase den gleichen Wert, der mit dem Symbol R angegeben und als **Gaskonstante** bezeichnet wird. Für ein Mol Gas hat die Zustandsgleichung die folgende Form:

$$pV = RT.$$

Für n Mole Gas gilt entsprechend

$$pV = nRT.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß eine beliebig gewählte Gasmenge der Masse m, von der ein Mol die Masse M hat, die Zahl $n = m/M$ Mole enthält, kann für diese Gasmenge die Zustandsgleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

In ihrem Verhalten entsprechen nur die **idealen Gase** dieser Zustandsgleichung. Dagegen erfüllen die realen Gase die angegebene Zustandsgleichung nur annähernd, und zwar jeweils um so besser, je kleiner der Druck ist, unter dem sie stehen, und je höher die Temperatur ist, die in ihnen herrscht.
In einem Gemisch von solchen Gasen, die chemisch nicht miteinander reagieren, verhält sich jedes Gas so, als ob ihm allein der gesamte Raum des Gasvolumens zur Verfügung stünde, so daß es auf die Wände einen Druck ausübt, der vom Vorhandensein der anderen Gaskomponenten nicht beeinflußt wird.
Nach dem Gesetz von DALTON ist der resultierende Druck eines Gemischs von Gasen gleich der Summe der Partialdrücke aller am Gasgemisch beteiligten Komponenten, d. h.,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots.$$

Gemäß den Darstellungen der kinetischen Gastheorie bewegen sich die Gasmoleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten in alle Richtungen, wobei sich ihre Geschwindigkeiten bei Zusammenstößen mit einem festen Hindernis oder untereinander plötzlich ändern.
Der Gasdruck auf die das Gas einschließenden Gefäßwandungen wird nach den Aussagen der kinetischen Gastheorie durch die elastischen Stöße der Moleküle gegen die Gefäßwandungen hervorgerufen. Aus entsprechenden Berechnungen ergibt sich für

[1]) Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das soviel elementare Teilchen enthält, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffisotops C 12 enthalten sind.
Seit 1971 ist das Mol eine Grundeinheit im SI

diesen Druck die Beziehung

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2}$$

(n Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Gasmoleküle, m Masse eines Moleküls). $\overline{v^2}$ ist als das arithmetische Mittel der Quadrate der Bewegungsgeschwindigkeiten aller Gasmoleküle definiert:

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n},$$

wobei $n_1, n_2, \ldots$ die Zahl der mit der jeweiligen Geschwindigkeit $v_1, v_2, \ldots$ sich bewegenden Moleküle darstellen. Aus ausführlicheren Berechnungen findet man für die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

(k BOLTZMANN-Konstante, T absolute Temperatur). Wenn wir ersetzen $k = R/N_A$, dann erhalten wir für die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

wobei M die Molmasse des Gases bedeutet.
In einer Volumeneinheit des Gases befinden sich bei einem Druck p und einer Temperatur T

$$n = \frac{p}{kT}$$

Gasmoleküle.

Das **Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung** der Moleküle besagt:

Von allen in einer Volumeneinheit enthaltenen n Molekülen bewegen sich dn *mit Geschwindigkeiten, die in dem zwischen v und v +* dv *liegenden Geschwindigkeitsintervall liegen entsprechend der Beziehung*

$$\mathrm{d}n = nf(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, nv^2\, \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v.$$

Neben der mittleren Geschwindigkeit ist es in der Thermodynamik auch noch üblich, die **wahrscheinlichste** sowie die **Durchschnittsgeschwindigkeit** einzuführen. Die wahr-

scheinlichste Bewegungsgeschwindigkeit der Gasmoleküle v_m ist diejenige, mit der sich bei gegebener Temperatur eine maximal große Zahl von Molekülen bewegt. Man kann sie aus der Beziehung

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \bar{v}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

errechnen.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Molekülbewegung wird durch das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Gasmoleküle definiert:

$$v_d = \frac{\int\limits_0^\infty nv(fv)\,dv}{n} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi n}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,\bar{v}.$$

Der Mittelwert der kinetischen Energie der Moleküle eines Gases, in dem nur Moleküle gleicher Art enthalten sind, wobei jedes einzelne Molekül jeweils i Freiheitsgrade hat, kann durch die Beziehung bestimmt werden:

$$\varepsilon = \frac{i}{2}kT.$$

Ein einatomiges Molekül hat drei, ein zweiatomiges fünf und ein aus drei oder mehr Atomen bestehendes Molekül hat sechs Freiheitsgrade der Bewegung.

Die **durchschnittliche Zahl** der in der Zeiteinheit erfolgenden **Zusammenstöße** eines Moleküls mit anderen errechnet man aus

$$Z = \frac{4}{3}\pi n D^2 v_d,$$

wobei D den Durchmesser eines Gasmoleküls darstellt.

Die durchschnittliche Weglänge, die ein Gasmolekül zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen zurücklegen kann, bezeichnen wir als die **mittlere freie Weglänge** l der Gasmoleküle. Sie wird ermittelt aus

$$l = \frac{v_d}{Z} = \frac{3}{4\pi n D^2}.$$

Der Koeffizient der inneren Reibung eines Gases η wird aus der Beziehung errechnet

$$\eta = \frac{M v_d}{4\pi N_A D^2}$$

(M Molmasse des Gases, N_A AVOGADROsche Zahl).

B Beispiele

131. In einer an einem Ende zugeschmolzenen Glaskapillare von überall gleichem Querschnitt A ist durch einen Quecksilberfaden der Länge $l_0 = 15$ cm ein Luftvolumen abgeschlossen. Wenn das abgeschmolzene Ende des vertikal gehaltenen Röhrchens nach oben zeigt, hat die eingeschlossene Luftsäule die Länge $l_1 = 37{,}5$ cm, wenn das abgeschmolzene Ende nach unten weist, ist die Luftsäule $l_2 = 25$ cm lang. Wie groß ist der atmosphärische Druck? Wie lang wird die Luftsäule sein, wenn das Röhrchen unter einem Winkel $\varphi = 60°$ gegen die Vertikale geneigt ist?

Lösung

Wir bezeichnen den atmosphärischen Druck mit b und die zugehörigen Drücke der eingeschlossenen Luftsäule in der ersten bzw. zweiten Stellung mit p_1 und p_2 (Bild 84a, b). Dann sind im Gleichgewichtszustand die Beziehungen

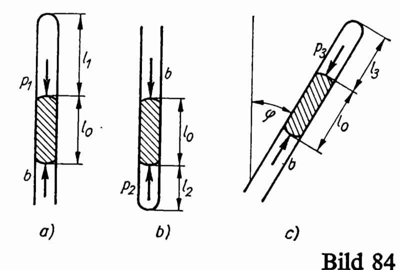


Bild 84

$$p_1 + l_0 \varrho g = b$$

$$p_2 = b + l_0 \varrho g$$

erfüllt. Unter der Voraussetzung, daß sich während des Experiments die Temperatur der Luft nicht verändert, gilt entsprechend dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

oder

$$(b - l_0 \varrho g) A l_1 = (b + l_0 \varrho g) A l_2,$$

woraus sich ergibt

$$b = l_0 \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \varrho g.$$

Wenn wir den barometrischen Druck durch die Länge der Quecksilbersäule ausdrücken, finden wir

$$b' = l_0 \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} = 150 \text{ mm} \frac{625 \text{ mm}}{125 \text{ mm}} \mathrel{\hat{=}} \underline{750 \text{ Torr}} = \underline{99991{,}8 \text{ Pa}}.$$

Wenn wir die Kapillare um den Winkel φ neigen (Bild 84c), dann ist der Druck der eingeschlossenen Luftsäule p_3 durch die Differenz des barometrischen und des hydrostatischen Drucks der Quecksilbersäule $l_0 \varrho g \cos \varphi$ gegeben. Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE gilt hier

$$p_3 V_3 = p_1 V_1$$

oder

$$(b - l_0 \varrho g \cos \varphi) A l_3 = (b - l_0 \varrho g) A l_1 .$$

Da $b = b'\varrho g$ ist, erhalten wir nach Umformung

$$l_3 = l_1 \frac{b' - l_0}{b' - l_0 \cos\varphi} = \underline{33{,}3 \text{ cm}}.$$

132. Der Zylinder einer Kolbenluftpumpe hat ein Volumen der Größe $V_1 = 2 \text{ dm}^3$, der zugehörige Rezipient ein solches von $V_0 = 3 \text{ dm}^3$. Berechnen Sie Luftdruck und Luftdichte unter dem Rezipienten nach dem vierten Kolbenhub unter der Voraussetzung, daß der Pumpvorgang so langsam erfolgt, daß die Temperatur als konstant angesehen werden kann. Wieviel Kolbenhübe müssen ausgeführt werden, damit der Luftdruck im Rezipienten auf $^1/_{10}$ seines ursprünglichen Wertes sinkt? (Bild 85)

Lösung

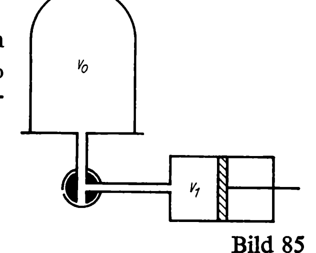


Bild 85

Nach dem ersten Kolbenhub vergrößert sich das Volumen der Luft von V_0 auf $V_0 + V_1$, und ihr Druck sinkt von p_0 auf p_1. Da der Prozeß bei konstanter Temperatur ablaufen soll, gilt nach BOYLE-MARIOTTE

$$p_0 V_0 = p_1(V_0 + V_1).$$

Nach dem zweiten Kolbenhub wird gelten

$$p_1 V_0 = p_2(V_0 + V_1)$$

und also nach dem n-ten

$$p_{n-1} V_0 = p_n(V_0 + V_1).$$

Wenn wir diese Gleichungen multiplizieren, dann erhalten wir nach Umformung für den Druck nach Ausführung des n-ten Kolbenhubes

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1}\right)^n.$$

Nach dem 4. Kolbenhub finden wir für den Druck

$$p_4 = p_0 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \underline{0{,}13\, p_0}.$$

Wenn die Anfangsdichte der Luft durch die Größe ϱ_0 angegeben wurde, dann nimmt die Luft nach dem 1. Kolbenhub ein größeres Volumen ein, und ihre Dichte wird sich vermindern. Aus der Massengleichheit vor und nach dem Kolbenhub ergibt sich

$$\varrho_0 V_0 = \varrho_1(V_0 + V_1).$$

Nach dem 2. Kolbenhub finden wir

$$\varrho_1 V_0 = \varrho_2(V_0 + V_1)$$

und nach dem n-ten

$$\varrho_{n-1} V_0 = \varrho_n(V_0 + V_1).$$

Nach Umformung finden wir

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n .$$

Also nimmt die Dichte nach dem 4. Kolbenhub den Wert an

$$\varrho_4 = \underline{0{,}13\, \varrho_0} .$$

Wenn nach einer Anzahl von k Kolbenhüben der ursprüngliche Druck p_0 auf ein n-tel seines ursprünglichen Wertes gefallen ist, finden wir

$$p_k = \frac{p_0}{n} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^k ,$$

woraus wir nach Umformung erhalten

$$k = \frac{\lg n}{\lg \dfrac{V_0 + V_1}{V_0}} ,$$

d. h. für den vorgegebenen Fall

$$k = \frac{\lg 10}{\lg \dfrac{5}{3}} \approx \underline{5} .$$

133. Die Dichte der Luft hat bei einem Druck $p_1 = 2$ atm und einer Temperatur $t_1 = 27$ °C den Wert $\varrho_1 = 2{,}354\ \mathrm{g\,l^{-1}}$. Wie groß ist die Luftdichte unter Normalbedingungen ($p_0 = 1$ atm, $t_0 = 0$ °C)?

Lösung

Aus der Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

folgt für die Dichte

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} .$$

Für die sich unter verschiedenen Bedingungen einstellenden Dichten kann man schreiben

$$\varrho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0} ; \quad \varrho = \frac{Mp_1}{RT_1} .$$

Durch Dividieren beider Gleichungen und nach Umformung erhalten wir

$$\varrho_0 = \varrho \frac{p_0}{p_1} \frac{T_1}{T_0} ,$$

d. h.,

$$\varrho_0 = 2{,}354 \text{ g l}^{-1} \frac{1 \text{ atm}}{2 \text{ atm}} \frac{300 \text{ K}}{273 \text{ K}} = 1{,}293 \text{ g l}^{-1} = \underline{1{,}293 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}}.$$

134. Eine Druckflasche enthält komprimiertes Gas unter einem Druck $p_1 = 40$ atm und der Temperatur $t_1 = 27$ °C. Wie verändert sich der Druck, wenn bei Ablassen der Hälfte des eingeschlossenen Gases die Temperatur um 15 °C abnimmt?

Lösung

Zur Berechnung dieser Aufgabe wenden wir die Zustandsgleichung an. Für den Anfangszustand ergibt sich

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1. \tag{1}$$

Nach Ablassen eines Teils des Gases bleibt in der Flasche eine Gasmenge der Masse $m' = m/2$ bei gleichbleibendem Volumen. Druck und Temperatur des zurückbleibenden Gases verändern sich auf die Werte p_2 bzw. T_2, und es ergibt sich jetzt die Zustandsgleichung

$$p_2 V = \frac{m}{2M} R T_2. \tag{2}$$

Durch Dividieren der Gln. (1) u. (2) und Umstellung erhalten wir

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{2T_1} = 40 \text{ atm} \frac{285 \text{ K}}{600 \text{ K}} = \underline{19 \text{ atm}} = \underline{1{,}92 \text{ MPa}}.$$

135. Es ist auszurechnen, in welcher Tiefe unter der Wasseroberfläche eines Sees die Dichte eines Luftbläschens den Wert von einem Prozent der Wasserdichte erreicht. Die Temperatur des Luftbläschens betrage 4 °C, der Außendruck über dem Wasser sei p_0, die Luftdichte unter Normalbedingungen ist $\varrho_0 = 1{,}293 \cdot 10^{-3}$ g cm^{-3}.

Lösung

Wenn der Druck des Luftbläschens in der Tiefe h mit dem Wert p angegeben ist, dann resultiert für seine Dichte gemäß der Zustandsgleichung die Beziehung

$$\varrho = \frac{pM}{RT}.$$

Die Luftdichte ist unter Normalbedingungen ϱ_0. Für sie gilt

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0}.$$

Nach Dividieren und Umformen der beiden vorstehenden Gleichungen erhalten wir für die Dichte

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} .$$

Im Gleichgewichtszustand ist der Innendruck des Bläschens genausogroß wie der darauf einwirkende Außendruck, welcher sich als Summe des atmosphärischen Drucks und des Drucks der über dem Bläschen stehenden Wassersäule ergibt. Es gilt also

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p_0 + h\varrho_1 g}{p_0} \frac{T_0}{T}, \qquad (1)$$

wobei ϱ_1 die Wasserdichte bei der Temperatur T darstellt. In Übereinstimmung mit der Aufgabenstellung wird sich ergeben

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{100},$$

so daß nach erfolgter Umformung aus Gl. (1) für die gesuchte Tiefe die Beziehung

$$h = \frac{\varrho_1 T - 100\varrho_0 T_0}{100\varrho_0\varrho_1 g T_0} p_0$$

resultiert. Wenn wir die gegebenen Werte einsetzen, erhalten wir

$$h = \frac{1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 277\,\mathrm{K} - 100 \cdot 1{,}293 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\,273\,\mathrm{K}}{100 \cdot 1{,}293 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\,981\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot 273\,\mathrm{K}} \times$$

$$\times\ 1{,}013 \cdot 10^6\,\mathrm{g\,cm\,s^{-2}\,cm^{-2}} = 7070\,\mathrm{cm} = \underline{70{,}7\,\mathrm{m}}.$$

136. Ein Ballon hat das Volumen $V = 3000\ \mathrm{m}^3$ und fliegt bei einer Temperatur $t = 0\ °\mathrm{C}$ in einer Höhe $h = 6000$ m, wo der äußere Luftdruck den Wert $p = 0{,}5$ atm hat. Berechnen Sie, wie groß die resultierende Kraft ist, die auf den Ballon wirkt, wenn er im Fall a) mit Wasserstoff und im Fall b) mit Helium gefüllt ist. Die Luftdichte beträgt unter Normalbedingungen $\varrho_0 = 1{,}293\ \mathrm{g\,l^{-1}}$.

Lösung

Der Ballon erfährt in der Luft einen Auftrieb, d. h. eine Kraft, die nach dem Archimedischen Prinzip dem Gewicht der von ihm verdrängten Luftmasse $G_1 = V\varrho_1 g$ entspricht, wobei mit ϱ_1 die Luftdichte bei gegebener Temperatur bezeichnet sei. Wenn diese Kraft größer ist als das Eigengewicht des Ballons, dann wird er durch die resultierende Kraft zum Steigen veranlaßt. Die Steigkraft F ist durch die Differenz zwischen Auftrieb G_1 und Eigengewicht $G_2 = V\varrho_2 g$ gegeben, d. h. durch die Kraft

$$F = G_1 - G_2 = V\varrho_1 g - V\varrho_2 g, \qquad (1)$$

wobei ϱ_2 die Gasdichte darstellt, das ist die Dichte desjenigen Gases, mit dem der Ballon gefüllt ist.

Aus der Zustandsgleichung erhalten wir für die Gasdichte beim Druck p und der Temperatur T

$$\varrho = \frac{pM}{RT}.$$

Das bedeutet für Wasserstoff

$$\varrho_2 = \frac{0{,}5\ \text{atm} \cdot 2\ \text{g mol}^{-1}}{0{,}082\ \text{l atm K}^{-1}\ \text{mol}^{-1}\ 273\ \text{K}} = 0{,}0447\ \text{g l}^{-1},$$

und für Helium

$$\varrho_2' = \frac{0{,}5 \cdot 4\ \text{g l}^{-1}}{0{,}082 \cdot 273} = 0{,}0894\ \text{g l}^{-1}.$$

Die Luftdichte beträgt unter Normalbedingungen

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}$$

und beim Druck p und der Temperatur T_0

$$\varrho_1 = \frac{pM}{RT_0}.$$

Durch Dividieren beider Gleichungen erhalten wir für die Luftdichte

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p}{p_0} = 1{,}293\ \text{g l}^{-1}\ \frac{0{,}5\ \text{atm}}{1\ \text{atm}} = 0{,}6465\ \text{g l}^{-1}.$$

Die gemäß Gl. (1) resultierende Steigkraft hat für den Fall
a) der Wasserstoff-Füllung den Wert

$$F_a = 3000\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2}\ (0{,}6465\ \text{kg m}^{-3} - 0{,}0447\ \text{kg m}^{-3}) = \underline{17710\ \text{N}}$$

und im Fall
b) der Heliumfüllung den Wert

$$F_b = 3000 \cdot 9{,}81\ (0{,}6465 - 0{,}0894)\ \text{N} = \underline{16400\ \text{N}}.$$

137. Ein Gasgemisch setzt sich aus den Gasen Wasserstoff (H_2), Methan (CH_4) und Kohlenmonoxid (CO) zusammen. In welchen Mengen sind die einzelnen vorgenannten Komponenten im Gemisch enthalten, wenn ihre jeweiligen Partialdrücke wie folgt bestimmt sind:

$$p_1 = 0{,}7\ \text{atm}; \quad p_2 = 2\ \text{atm}; \quad p_3 = 1{,}3\ \text{atm}?$$

Lösung

Wenn m_1, m_2, m_3 die Massen der einzelnen, in einer Masseneinheit des Gemischs vertretenen Komponenten sind und M_1, M_2, M_3 ihre Molmassen, dann gilt entsprechend

der Zustandsgleichung für jede Komponente

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \tag{1}$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \tag{2}$$

$$p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT, \tag{3}$$

wobei V das Volumen des vom Gasgemisch eingenommenen Raumes darstellt. Wenn wir die Gln. (1) u. (2) bzw. (1) u. (3) teilen, dann erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{M_2}{M_1},$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{m_1}{m_3} \frac{M_3}{M_1},$$

die zusammen mit der Gleichung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \text{ g}$$

die Lösung für m_1, m_2, m_3 in der Gestalt liefern

$$m_1 = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}\frac{M_2}{M_1} + \frac{p_3}{p_1}\frac{M_3}{M_1} + 1}; \qquad m_2 = \frac{p_2 M_2 m_1}{p_1 M_1}; \quad m_3 = \frac{p_3 M_3 m_1}{p_1 M_1}$$

($M_1 = 2 \text{ g mol}^{-1}$, $M_2 = 16 \text{ g mol}^{-1}$ und $M_3 = 28 \text{ g mol}^{-1}$).
Nach Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$\underline{m_1 = 0{,}02 \text{ g}}; \quad \underline{m_2 = 0{,}46 \text{ g}}; \quad \underline{m_3 = 0{,}52 \text{ g}}.$$

Im Gemisch sind also prozentual enthalten

2% He, 46% CH_4 und 52% CO.

138. Bei welcher Temperatur ist die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle des Kohlendioxids gleich der mittleren Geschwindigkeit, welche die Moleküle des Stickstoffs bei 0 °C aufweisen?

Lösung

Die Bedingung, daß die mittleren Geschwindigkeiten der Moleküle zweier verschiedener Gase bei unterschiedlichen Temperaturen gleich sein sollen, drücken wir durch die Beziehung aus:

$$\sqrt{\frac{3RT_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M_2}},$$

woraus für die gesuchte Temperatur des Kohlendioxids resultiert:

$$T_2 = \frac{M_2}{M_1} T_1.$$

Die Molmasse für N_2 ist $M_1 = 28\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$, die eines Mols CO_2 ist $M_2 = (12 + 32)\,\text{g}\,\text{mol}^{-1} = 44\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$. Nach Einsetzen erhalten wir

$$T_2 = \frac{44\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}}{28\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}}\, 273\,\text{K} = 429\,\text{K},$$

$$\underline{t_2 = 156\,°\text{C}.}$$

139. Berechnen Sie, welche Veränderung der Mittelwert der kinetischen Energie von Molekülen des Gases Argon erfährt, wenn von der Substanz $m = 200$ g vorliegen und unter Konstanthaltung des Volumens eine Wärmemenge $Q = 840$ cal zugeführt wird.

Lösung

Wenn das Gas sein Volumen nicht verändert, kann es Energie von außen nur als Wärme, nicht als mechanische Arbeit erhalten. Die von außen zugeführte Wärme Q vergrößert die innere Energie des Gases um den Betrag ΔU, und es wird die Beziehung

$$Q = \Delta U \tag{1}$$

erfüllt.

Wenn ε der mittlere Wert der kinetischen Energie der Moleküle eines idealen Gases ist, dann hat die innere Energie eines Mols dieses Gases den Wert $U_m = N_A \varepsilon$ (N_A ist die Avogadrosche Zahl), und das Gas der Masse m ist durch die innere Energie

$$U = n N_A \varepsilon$$

charakterisiert, wobei $n = m/M$ die Zahl der darin enthaltenen Gasmoleküle darstellt. Wenn wir berücksichtigen, daß Argon ein einatomiges Gas ist, für das demnach $\varepsilon = {}^3/_2\, kT$ gilt, finden wir seine innere Energie zu

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} kT.$$

In Übereinstimmung mit Gl. (1) können wir also schreiben

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} N \frac{3}{2} k \Delta T.$$

Wir berücksichtigen weiter, daß $\Delta\varepsilon = {}^3/_2\, k\Delta T$ die Änderung der mittleren kinetischen Energie eines Moleküls bedeutet, und erhalten für diesen Wert

$$\Delta\varepsilon = \frac{MQ}{mN_A} = \frac{39{,}9\,\text{g}\,\text{mol}^{-1} \cdot 840\,\text{cal}}{200\,\text{g} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}} = 27{,}8 \cdot 10^{-23}\,\text{cal}$$

und in Energieeinheiten ausgedrückt (1 cal = 4,187 Joule)

$$\underline{\Delta\varepsilon = 116{,}4 \cdot 10^{-23}\,\text{J}.}$$

140. Ermitteln Sie unter Berücksichtigung der Aussagen der kinetischen Gastheorie die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen für die Gase a) Argon und b) Stickstoff. Die Ergebnisse vergleichen Sie mit den in Tabelle 7 angegebenen Werten.

Lösung

Wenn wir voraussetzen, daß das Gas aus Molekülen gleicher Art besteht und daß jedes seiner Moleküle i Freiheitsgrade hat, dann ist der Mittelwert der kinetischen Energie seiner Moleküle durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT$$

gegeben, und für die gesamte innere Energie eines Mols des betreffenden Gases gilt dann

$$U_m = N_A \frac{i}{2} kT,$$

wobei N_A die Zahl der Moleküle in einem Mol ($N_A = 6{,}03 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$) darstellt. Damit enthält eine beliebige Gasmenge der Masse m die Zahl $n = m/M$ Mole. Wenn wir berücksichtigen, daß die BOLTZMANN-Konstante $k = R/N_A$ ist, dann gilt für die innere Energie des Gases

$$U = \frac{m}{M} N_A \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT.$$

Wenn wir das Gas unter Konstanthaltung seines Volumens erwärmen, dann wird die gesamte zugeführte Wärme Q für die Erhöhung der inneren Energie benötigt, und die Temperatur wächst um den Betrag ΔT an. Demnach gilt

$$Q_V = \Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T + \Delta T) - \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T. \tag{1}$$

Gemäß der Definition der spezifischen Wärmekapazität ist

$$c_v = \frac{Q_V}{m \Delta T},$$

und nach Einsetzen für Q_V erhalten wir aus Gl. (1)

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt sich:
a) Argon ist ein einatomiges Gas, für das $i = 3$ gilt, so daß wir finden

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3 \cdot 8{,}31\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}}{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}} = 311\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß 1 J = 0,239 cal ist, ergibt sich

$$\underline{c_v = 0{,}0743\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}}.}$$

Die Tabellen geben einen Wert von 0,0762 cal g^{-1} K^{-1} an.
b) Stickstoff ist ein zweiatomiges Gas, für das $i = 5$ ist, so daß wir finden

$$c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{M} = \frac{5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} = 742\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}},$$

d. h.,

$$\underline{c_v = 0{,}177\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}}},$$

was mit dem Wert der Tabelle von 0,177 cal g^{-1} K^{-1} übereinstimmt.

141. Berechnen Sie für Argongas den Prozentsatz derjenigen Moleküle, die sich bei $t_0 = 120$ °C mit Geschwindigkeiten im Intervall zwischen $v_1 = 2000$ km h^{-1} und $v_2 = 2330$ km h^{-1} bewegen.

Lösung

Gemäß dem MAXWELLschen Gesetz gilt für die Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, v^2\, \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, \mathrm{d}v. \tag{1}$$

Diese Beziehung können wir vereinfachen, indem wir die sog. relative Geschwindigkeit als den Quotienten der Momentangeschwindigkeit v und der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit der Moleküle v_m einführen:

$$u = \frac{v}{v_m} = \frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}.$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-u^2} u^2\, \mathrm{d}u.$$

$\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}n}{n}$ gibt die relative Molekülzahl an; die relativen Geschwindigkeiten der Moleküle liegen im Geschwindigkeitsintervall zwischen den Grenzen u_1 und u_2. Der Ausdruck

$$\frac{n_{u0}}{n} = \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-u^2} u^2\, \mathrm{d}u$$

wiederum gibt die relative Anzahl derjenigen Moleküle an, deren Relativgeschwindigkeiten größer sind als u_0. Dieses Integral wurde berechnet, und in Bild 86 kann man die Werte dieser relativen Molekülzahlen für die verschiedenen Relativgeschwindigkeiten direkt ablesen. Nach den in der Aufgabe angegebenen Bedingungen finden wir

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}} = \sqrt{\frac{2RT_0}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}3\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\ 393\ \mathrm{K}}{40 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}}} =$$

$$= 404\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 1454\ \mathrm{km\,h^{-1}}$$

und die Relativgeschwindigkeiten

$$u_1 = \frac{v_1}{v_m} = \frac{2000}{1454} = 1{,}375,$$

$$u_2 = \frac{v_2}{v_m} = \frac{2330}{1454} = 1{,}6.$$

Gemäß Bild 86 finden wir

$$\frac{n_{u1}}{n} = 0{,}30; \quad \frac{n_{u2}}{n} = 0{,}18.$$

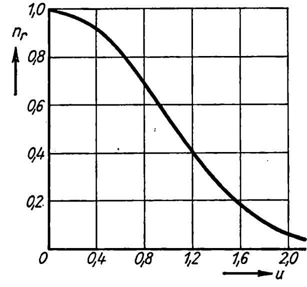


Bild 86

Es haben also 30% der Moleküle eine größere Geschwindigkeit als 2000 km h^{-1} und 18% eine größere als 2330 km h^{-1}. Im vorgegebenen Geschwindigkeitsintervall bewegen sich 12% aller Moleküle.

142. Ermitteln Sie unter Hinzuziehung des MAXWELLschen Gesetzes der Geschwindigkeitsverteilung die Beziehung für die wahrscheinlichste und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Gasmoleküle.

Lösung

Nach dem MAXWELLschen Gesetz gilt für die relative Anzahl der Moleküle, deren absoluter Geschwindigkeitsbetrag im Intervall zwischen v und $v + \mathrm{d}v$ liegt, die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, v^2\, \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, \mathrm{d}v. \tag{1}$$

a) Wie aus der grafischen Darstellung und der Berechnung ersichtlich ist, nimmt die Funktion $f(v)$ Nullwerte für $v = 0$ und für $v = \infty$ an. Irgendwo zwischen diesen beiden Nullstellen liegt ein Maximum. Die Lage des Maximums entspricht derjenigen Geschwindigkeit, mit der sich bei gegebener Temperatur eine maximale Anzahl von Molekülen bewegt, die sog. wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Für sie gilt

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0.$$

Nach Berechnen der ersten Ableitung erhalten wir

$$v^2\left(-\frac{2m}{2kT}\right)v\,e^{-\frac{mv^2}{2kT}} + 2v\,e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0,$$

hieraus

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\,.$$

Da $k = R/N_A$ und $mN_A = M$ ist, wobei M die Molmasse darstellt, finden wir weiter

$$\underline{v_m = \sqrt{\frac{2RT}{M}}}\,.$$

b) Unter der durchschnittlichen Geschwindigkeit der Moleküle verstehen wir das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Gasmoleküle. Wenn sich von der Gesamtzahl n der Moleküle der Bruchteil dn mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ bewegt, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit v_d durch die Beziehung

$$v_d = \frac{\int\limits_0^\infty v\,dn}{n} = \int\limits_0^\infty v\frac{dn}{n}$$

gegeben. Dabei bedeutet dn/n die relative Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeiten im Intervall v bis $v + dv$ liegen, d. h. $f(v)\,dv$. In Hinblick auf Gl. (1) können wir so schreiben:

$$v_d = \int\limits_0^\infty vf(v)\,dv = \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\,v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\int\limits_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv.$$

Das Integral

$$\int\limits_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv$$

lösen wir durch die Substitution

$$\frac{mv^2}{2kT} = y^2,$$

so daß sich ergibt

$$\frac{m}{kT}v\,dv = 2y\,dy.$$

Nach dieser Substitution geht das Integral über in

$$\frac{4k^2T^2}{m^2}\int_0^\infty y^3\,e^{-y^2}\,dy.$$

Der Ausdruck $\int_0^\infty y^3\,e^{-y^2}\,dy$, der partiell integriert wurde, ergibt den Wert $^1/_2$, und deshalb finden wir

$$v_d = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3 \frac{4k^2T^2}{m^2}\,\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Wenn wir festhalten, daß $k = R/N_A$ und $mN_A = M$ ist, erhalten wir schließlich

$$\underline{v_d = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}.$$

143. Berechnen Sie, wieviel Prozent der Moleküle eines Gases eine kinetische Energie der Translation haben, die größer als das Dreifache des Mittelwertes der kinetischen Translationsenergie der Moleküle ist.

Lösung

Für die Geschwindigkeiten der Moleküle, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, muß gelten

$$\frac{1}{2}\,mv^2 > 2\,\frac{1}{2}\,m\overline{v^2},$$

woraus wir erhalten

$$v > \sqrt{2}\,\bar{v}.$$

Die Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeiten größer sind als $v_0 = \sqrt{2}\,\bar{v}$, läßt sich leicht aus dem Resultat der Aufgabe 141 und Bild 86 ermitteln.
Wir finden die relative Geschwindigkeit aus

$$u_0 = \frac{v_0}{v_m};\quad v_m = \sqrt{\frac{2RT}{M}};\quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

und daher

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}\bar{v}}{v_m} = \sqrt{3} = 1{,}73.$$

Entsprechend dem Diagramm ist

$$\frac{n_{u0}}{n} = 0{,}11.$$

Also haben 11 % aller Moleküle eine kinetische Energie der Translation, die größer ist als das Dreifache des Mittelwerts.

144. Unter Normalbedingungen ($p_0 = 1$ atm, $t_0 = 0$ °C) hat die freie Weglänge eines Wasserstoffmoleküls den Wert $l_0 = 1{,}28 \cdot 10^{-5}$ cm. Wie groß ist der Durchmesser eines Wasserstoffmoleküls und wie groß wird seine mittlere freie Weglänge für den Fall, daß die Temperatur $t_0 = 0$ °C und der Druck $p = 10^{-4}$ Torr beträgt?

Lösung

Wenn wir die Beziehung für die mittlere freie Weglänge

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2}$$

benutzen, in die wir für n (Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit)

$$n = \frac{p}{kT}$$

einsetzen, so erhalten wir für den gesuchten Durchmesser eines Wasserstoffmoleküls die Beziehung

$$D^2 = \frac{3kT}{4\pi p l}\,.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen ergibt sich

$$D^2 = \frac{3kT_0}{4\pi p_0 l_0} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}\ 273\ \mathrm{K}}{4\pi\ 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}\ 1{,}28 \cdot 10^{-7}\mathrm{m}} = 6{,}95 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^2,$$

so daß man findet

$$\underline{D = 2{,}6 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.}$$

Die mittlere freie Weglänge beträgt unter Normalbedingungen

$$l_0 = \frac{3kT_0}{4\pi p_0 D^2}$$

und bei einem Druck p und der Temperatur T_0

$$l = \frac{3kT_0}{4\pi p D^2}\,.$$

Nach Division beider Gleichungen erhalten wir

$$\frac{l}{l_0} = \frac{p_0}{p}$$

und damit

$$l = l_0 \frac{p_0}{p} = 1{,}28 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} \frac{760\ \mathrm{Torr}}{10^{-4}\ \mathrm{Torr}} = \underline{0{,}97\ \mathrm{m}.}$$

145. In einem abgeschlossenen Raum von einem Kubikzentimeter Inhalt ist Wasserstoff bei 0 °C und unter einem Druck von 1 atm eingeschlossen. Berechnen Sie die Anzahl der in einer Sekunde in diesem Gas auftretenden Zusammenstöße der Moleküle miteinander, wenn der Durchmesser eines Moleküls mit $D = 2{,}38 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen wird.

Lösung

Innerhalb einer Sekunde stößt das einzelne Molekül durchschnittlich mit Z anderen zusammen. Wenn v_d die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle darstellt, dann ist

$$Z = \frac{4\pi n D^2}{3} v_d .$$

Bei jedem Zusammenstoß treffen zwei Moleküle aufeinander. Daher ist die Gesamtzahl der Zusammenstöße pro Volumen- und Zeiteinheit durch die Beziehung

$$Z_0 = \frac{n}{2} Z = \frac{4\pi n^2 D^2}{6} v_d$$

gegeben, wobei n die Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle bedeutet. Wenn wir berücksichtigen, daß

$$n = \frac{p}{kT}; \quad v_d = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

und $k = R/N_A$ ist, dann ergibt sich

$$Z_0 = \frac{4\pi p^2 D^2}{6k^2T^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{4p^2D^2}{3k^2T^2} \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir

$$Z_0 = \frac{4 \cdot 1{,}013^2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N^2\,m^{-4}}\ 2{,}38^2 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{m^2}}{3 \cdot 1{,}38^2 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{J^2\,K^{-2}}\ 273^2\ \mathrm{K^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}31\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\ 273\ \mathrm{K}}{2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}}} =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{35}\ \mathrm{m^{-3}\,s^{-1}} = \underline{1{,}5 \cdot 10^{29}\ \mathrm{cm^{-3}\,s^{-1}}} .$$

146. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle des Gases Argon, wenn die mittlere Zeitdauer zwischen jeweils zwei Zusammenstößen seiner Moleküle $\tau = 9 \cdot 10^{-7}$ s beträgt und wenn in der Volumeneinheit $n = 3{,}4 \cdot 10^{12}\ \mathrm{cm^{-3}}$ Moleküle enthalten sind? Unter Normalbedingungen beträgt die mittlere freie Weglänge von Argonmolekülen $l_0 = 6{,}66 \cdot 10^{-6}$ cm.

Lösung

In der Zeitspanne τ, die dem zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen entspricht, legt das Molekül, das sich mit der durchschnittlichen Ge-

schwindigkeit v_d fortbewegt, eine Strecke der Länge

$$l = v_d \tau$$

zurück, woraus folgt $v_d = \frac{l}{\tau}$. (1)

Die mittlere freie Weglänge des Moleküls erfüllt die Beziehung

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2} . \qquad (2)$$

Den unbekannten Durchmesser des Moleküls ermitteln wir aus den Normalbedingungen im Gas. Aus diesen Angaben resultiert

$$l_0 = \frac{3}{4\pi n_0 D^2} .$$

Da ferner

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$$

ist, gilt die Beziehung

$$D^2 = \frac{3kT_0}{4\pi l_0 p_0} .$$

Durch Einsetzen in Gl. (2) erhalten wir

$$l = \frac{3}{4\pi n \frac{3kT_0}{4\pi l_0 p_0}} = \frac{l_0 p_0}{nkT_0} .$$

Für die durchschnittliche Geschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (1)

$$v_d = \frac{l}{\tau} = \frac{l_0 p_0}{nkT_0 \tau} .$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$v_d = \frac{6{,}66 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}}{3{,}4 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-3}} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}\,273\,\mathrm{K} \cdot 9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}} =$$

$$= \underline{5{,}86 \cdot 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}} .$$

147. Bestimmen Sie den Zusammenhang der mittleren freien Weglänge von Gasmolekülen und des Koeffizienten der inneren Reibung η. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge von Gasmolekülen des Sauerstoffs unter Normalbedingungen, wenn hierbei der Koeffizient der inneren Reibung des Sauerstoffs den Wert $\eta_0 = 19{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ hat.

Lösung

a) Für l und η gelten die Beziehungen

$$l = \frac{3}{4\pi n D^2}; \quad \eta = \frac{M v_d}{4\pi N_A D^2},$$

und ihr Quotient ist

$$\frac{\eta}{l} = \frac{M n v_d}{3 N_A}.$$

Der Quotient $m = M/N_A$ stellt die Masse eines Moleküls dar, und das Produkt aus Molekülmasse und Zahl der Moleküle je Volumeneinheit ergibt die Gasdichte $\varrho = mn$. Daher ist

$$\underline{\eta = \frac{1}{3} \varrho v_d l.}$$

b) Für die mittlere freie Weglänge kann dann geschrieben werden

$$l = \frac{3\eta}{\varrho v_d}.$$

Wenn wir die bereits bekannten Beziehungen für die durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle

$$v_d = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

und die Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{pM}{RT}$$

anwenden, dann finden wir für l die Beziehung

$$l = \frac{3\eta}{\frac{pM}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}},$$

woraus wir nach einfacher Umformung erhalten

$$l = \frac{3\eta}{2p}\sqrt{\frac{RT\pi}{2M}}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir schließlich

$$l = \frac{3 \cdot 19{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}{2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}} \sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8{,}31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\,273\,\mathrm{K}}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}} =$$

$$= \underline{9{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}.}$$

A Aufgaben

157. Ein Manometer zeigt einen Druck von 75 at an. Drücken Sie diesen Druck in physikalischen Atmosphären, in Torr, in Bar und in Pascal aus.

158 a) Berechnen Sie, bei welcher Temperatur ein Gas zwei Drittel des Volumens einnimmt, das es – bei Konstanthaltung des Druckes – bei der Temperatur 0 °C einnahm.

158 b) Ermitteln Sie, bei welcher Temperatur ein Gas – bei Konstanthaltung des Volumens – einen n-fachen Druck aufweist als bei 0 °C.

159. Ein an einem Gefäß mit komprimiertem Gas sitzendes Manometer zeigt bei der Temperatur $t = 20$ °C einen Druck von 60 kp cm^{-2} an. Nach Abkühlung des Gases zeigt das Manometer nur noch 45 kp cm^{-2} an. Berechnen Sie die Endtemperatur des Gases unter der Voraussetzung, daß eine etwaige Volumenänderung des Gefäßes vernachlässigt werden kann.

160. Im Raum über der Quecksilberfüllung eines Barometers befindet sich eine geringe Luftmenge, was bewirkt, daß das Barometer einen geringeren Druck anzeigt, als tatsächlich herrscht. Wenn z. B. der wahre Luftdruck 750 Torr beträgt, zeigt das Barometer nur 730 Torr an. Berechnen Sie, wie groß der wahre Wert des Luftdrucks ist, wenn das Barometer 690 Torr anzeigt. Die Länge des Barometers beträgt 85 cm. Den Druck messen wir bei gleichbleibender Temperatur.

161. Welches Volumen nehmen 4 g Helium bei einem Druck von 750 Torr und einer Temperatur von 20 °C ein?

162. Eine bestimmte Menge Luft nimmt bei einer Temperatur $t_0 = 8$ °C und dem Druck $p_0 = 750$ Torr ein Volumen $V_0 = 112$ cm^3 ein. Auf welche Temperatur muß die Luft erwärmt werden, damit sie bei einem Druck $p_1 = 740$ Torr das Volumen $V_1 = 136$ cm^3 einnimmt?

163. In einem Behälter von 40 l Fassungsvermögen befindet sich Sauerstoff bei einer Temperatur von 27 °C und unter einem Druck von 10 kp cm^{-2}. Berechnen Sie die Masse dieser Gasmenge.

164. Berechnen Sie die Dichte von Stickstoff bei 10 °C und einem Druck von 2 at.

165. Berechnen Sie das Gewicht der in einem Raum von 4 m · 5 m · 3 m enthaltenen Luftmenge bei einer Zimmertemperatur von 20 °C und einem Druck von 760 Torr. Die Luftdichte unter Normalbedingungen wird als bekannt vorausgesetzt.

166. Eine Glühbirne von 150 cm^3 Volumen ist mit Argon gefüllt. Wie hoch ist ihre Temperatur, wenn das Argon bei einem Druck von 750 Torr ein Gewicht von 1,45 · 10^{-4} kp hat?

167. Berechnen Sie, welchen Wert das spezifische Volumen des Wasserstoffs annimmt, wenn er bei einer Temperatur von 20 °C unter einem Druck von 1,25 atm steht.

168. In einem Gefäß von 6 l Inhalt befinden sich 1,4 g Gas bei einer Temperatur von 27 °C und einem Druck von 2,17 at. Um welches Gas handelt es sich?

169. Berechnen Sie, welches Volumen drei Mole Sauerstoff bei einem Druck von 3 atm und einer Temperatur von 100 °C einnehmen.

170. In einem Gefäß wurde Luft bei konstanter Temperatur bis auf 5 % ihres ursprünglichen Druckes entspannt. Welche Luftmenge mußte dazu aus dem Gefäß gepumpt werden?

171. Ein geeichtes Quecksilberbarometer zeigt bei $t_0 = 27$ °C einen Druck $b =$ $= 750$ Torr an. Die Länge der Baro-

meterröhre beträgt $l = 90$ cm, ihr Querschnitt $A = 1{,}5$ cm². Wenn wir in den Raum über dem Quecksilber ein wenig Sauerstoff leiten, sinkt die Quecksilbersäule um 50 mm. Berechnen Sie, welche Menge Sauerstoff wir eingeleitet haben, wenn vorausgesetzt wird, daß die Temperatur während des Prozesses konstant bleibt.

172. Ein Luftbläschen im Wasser eines Sees hat in einer Tiefe von $h = 21$ m bei der Temperatur $t_1 = 4$ °C einen Radius $r_1 = 1$ cm. Es steigt unter Volumenvergrößerung zur Wasseroberfläche auf. Wie groß wird sein Radius sein, wenn es die Wasseroberfläche erreicht hat, wo eine Temperatur von $t_2 = 27$ °C herrscht? Der atmosphärische Druck b stelle den Normaldruck dar, die Oberflächenspannung bleibe unberücksichtigt.

173. In einem Zylinder vom Volumen $V_1 = 5$ m³ befindet sich Kohlenmonoxidgas unter einem Druck $p_1 = 150$ atm, in einem anderen Zylinder vom Volumen $V_2 = 8$ m³ ist Wasserstoff von gleicher Temperatur, aber unter einem Druck $p_2 = 220$ atm enthalten. Bei der Vereinigung beider Gefäßinhalte bleibe die Temperatur konstant. Wie groß ist der Druck?

174. In einem Gefäß von 3 l Inhalt befinden sich 10 g Wasserstoff bei einer Temperatur von 20 °C, in einem anderen Gefäß von 5 l Inhalt bei gleicher Temperatur 8 g Stickstoff. Wie groß ist der resultierende Druck, der sich nach Vereinigung beider Gefäßinhalte einstellt?

175. Die Massenanteile eines Gemischs der durch Verbrennung entstandenen wasserfreien Gase sind folgende: 14% CO_2, 4,4% CO, 5,8% O_2, 75,8% N_2. Welchen Wert nimmt die mittlere Molmasse des Gemischs an?

176. Trockene Luft enthält – wenn wir Edelgase außer Betracht lassen – 23,2% (Massenprozente) Sauerstoff und 76,8% Stickstoff. Wie groß sind die Partialdrücke der einzelnen Komponenten, wenn der Gesamtdruck der Luft 750 Torr beträgt?

177. Ein Gasgemisch in der Zusammensetzung 12 g CO_2, 6 g O_2, 1 g CO und 86 g N_2 befindet sich bei $t_1 = 127$ °C in einem Gefäß vom Volumen $V = 3$ l. Wie groß ist der Gesamtdruck des Gemisches, und welche Werte nehmen die Partialdrücke der einzelnen Komponenten an?

178. Berechnen Sie, wieviel Moleküle (Atome) a) 1 l Wasser unter normalen Bedingungen, b) ein Eisenwürfel und c) ein Kupferwürfel mit 1 cm Kantenlänge enthält.

179. Wie groß ist die Masse eines Atoms (Moleküls) a) bei Eisen, b) bei Kupfer, c) bei Kochsalz?

180. Wie groß ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Moleküle a) des Stickstoffs, b) des Heliums bei den Temperaturen $t_1 = 500$ °C, $t_2 = 0$ °C, $t_3 = -270$ °C?

181. Unter der Annahme, daß die mittlere Zentraltemperatur der Sonne $2 \cdot 10^7$ K beträgt, soll berechnet werden, wie groß die mittlere kinetische Translationsenergie der Atome im Sonneninnern ist.

182. Bei welcher Temperatur hat die mittlere quadratische Geschwindigkeit von Stickstoffmolekülen gerade den halben Wert derjenigen bei Zimmertemperatur ($t_1 = 20$ °C)?

183. Wieviel Moleküle befinden sich in einem kugelförmigen Gefäß von 3 cm Radius, das mit Sauerstoff von 27 °C unter einem Druck von 10^{-4} Torr gefüllt ist?

184. In einem Gefäß von 2 l Inhalt befinden sich $3 \cdot 10^{20}$ Stickstoffmoleküle, 10^{20} Kohlenmonoxidmoleküle sowie $2 \cdot 10^{20}$ Wasserstoffmoleküle. Der Druck des Gemisches beträgt 20 Torr. Wie hoch ist seine Temperatur?

185. Eine gewisse Menge Helium wurde von der Temperatur $t_1 = 20$ °C auf die

Temperatur $t_2 = -250$ °C abgekühlt. Wie änderten sich dabei die mittlere kinetische Energie und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Moleküle?

186. Berechnen Sie, mit welcher durchschnittlichen und mit welcher wahrscheinlichsten Geschwindigkeit sich die Moleküle a) des Wasserstoffs, b) des Heliums und c) des Sauerstoffs bei einer Temperatur von 0 °C bewegen. Vergleichen Sie die Resultate mit der mittleren quadratischen Geschwindigkeit.

187. In einem mit Argon gefüllten Rohr pflanzt sich der Schall mit einer Geschwindigkeit v_0 fort. Berechnen Sie, welchen Wert die mittlere Geschwindigkeit der Argonmoleküle annimmt und mit welcher Geschwindigkeit sich die meisten Moleküle bewegen.

188. Berechnen Sie unter Hinzuziehung der Resultate der kinetischen Gastheorie den Wert der inneren Energie a) eines einatomigen, b) eines zweiatomigen Gases, dessen Druck mit p und dessen Volumen mit V gegeben ist.

189. Berechnen Sie unter Hinzuziehung der Aussagen der kinetischen Gastheorie a) die mittlere freie Weglänge der Moleküle von Stickstoff und Helium, b) die Zahl der Zusammenstöße pro Zeiteinheit, die ein Molekül mit den anderen bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von $b_1 = 10^{-3}$ Torr und von $b_2 = 760$ Torr erfährt. Als mittlerer Durchmesser eines Stickstoffmoleküls wird der Wert $D_1 = 3{,}16 \cdot 10^{-10}$ m, für ein Heliummolekül wird $D_2 = 2{,}2 \times 10^{-10}$ m angenommen.

190. Berechnen Sie den Durchmesser eines Neonmoleküls, von dem bekannt ist, daß es bei einer Temperatur $t = 327$ °C und einem Druck von 1 Torr durchschnittlich $2{,}2 \cdot 10^6$ Zusammenstöße in der Zeiteinheit ausführt.

191. In einem kugelförmigen Gefäß vom Volumen $V = 4{,}2$ l ist bei einer Temperatur $t = 68$ °C Stickstoff enthalten. Auf welchen Druckwert muß das Gas entspannt werden, damit die mittlere freie Weglänge seiner Moleküle den Gefäßabmessungen gleichkommt? Wieviel Moleküle werden sich dann noch im Gefäß befinden? Den Durchmesser eines Stickstoffmoleküls nehmen wir mit etwa $D = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ m an.

192. Drücken Sie die allgemeine Temperaturabhängigkeit des Koeffizienten der inneren Reibung eines Gases aus. Berechnen Sie den Koeffizienten der inneren Reibung für Luft bei einer Temperatur $t = 27$ °C, wenn dieser bei der Temperatur $t_0 = 0$ °C den Wert $\eta_0 = 18 \cdot 10^{-5}$ g cm^{-1} s^{-1} annimmt.

2.3. Thermodynamik

Unter der **inneren Energie** eines Systems von Stoffen (z. B. des in einem Gefäß eingeschlossenen Gases) verstehen wir diejenige Energie, die wir dem System zuführen müssen, damit es aus dem Zustand, den wir als Grundzustand gewählt haben, in den gegebenen Zustand übergeht. Ein Stoffsystem im Gleichgewichtszustand ist durch einen genau bestimmten Wert der inneren Energie ausgezeichnet. Vom Standpunkt der molekular-kinetischen Darstellung aus verstehen wir unter der inneren Energie eines Systems die Summe aus kinetischer und potentieller Energie der das System bildenden Moleküle.

Wir führen einem Stoffsystem Energie von außen gewöhnlich *durch mechanische Arbeit oder durch Wärme* zu; die Größe der Energieänderung eines Systems kann man durch die Größe der Arbeit oder der Wärme messen.[1]) Arbeit und Wärme sind *äquivalente* (*gleichwertige*) Energieformen.
Im internationalen Einheitensystem gilt die Umrechnungsbeziehung 1 kcal = = 4186,8 J.
Wenn ein System bei infinitesimaler Änderung seines Zustands Energie von außen durch die mechanische Arbeit dW und die Wärme dQ aufnimmt, so erhöht sich seine innere Energie um den Betrag dU gemäß der Beziehung

$$dU = dW + dQ. \quad (1)$$

Arbeit dW und Wärme dQ werden dabei in gleichen Einheiten ausgedrückt.
Die Gl. (1) stellt eine der mathematischen Formulierungen des **I. Hauptsatzes der Thermodynamik** dar.
Wenn die Größe dW (oder dQ) negativ ist, so nimmt das System keine Arbeit (oder Wärme) von seiner Umgebung auf, sondern gibt sie an diese ab. Wenn wir die Arbeit, die ein System verrichtet, mit dW' (die abgegebene Wärme entsprechend mit dQ') bezeichnen, dann gelten die Beziehungen

$$dW = -dW', \quad dQ = -dQ'.$$

In einem System von Stoffen geht ein **thermodynamischer** Prozeß vor sich, wenn sich sein Zustand ändert. Der thermodynamische Prozeß, der in einem Stoffsystem abläuft, wird dann als **Kreisprozeß (zyklischer Prozeß)** bezeichnet, wenn das System nach Durchlaufen verschiedener Zustandsänderungen wieder in den Ausgangszustand zurückkehrt.
Die Arbeit, die ein Gas bei einer umkehrbaren infinitesimalen Änderung seines Volumens um den Betrag dV gegen die äußeren Kräfte verrichtet (sog. **Volumenarbeit),** ist durch die Beziehung

$$dW' = p\,dV$$

gegeben, in der p der Gasdruck ist.
Unter der spezifischen Wärmekapazität einer beliebigen Gasmenge verstehen wir die Wärmemenge, die zu ihrer Erwärmung um die Temperaturdifferenz von 1 grd notwendig ist. Wir unterscheiden: **spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck** und **spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.** Bei einem gegebenen Gas ist erstere stets größer als letztere.

---

[1]) Gewöhnlich drückt man sich kurz aus: Einem System wird Wärme (Arbeit) zugeführt, ein System gibt Wärme ab, verrichtet Arbeit

Die Wärmekapazität eines Mols eines Gases wird als **Molwärme** bezeichnet. Sie hängt mit der spezifischen Wärmekapazität folgendermaßen zusammen:

$$C_p = Mc_p, \quad C_v = Mc_v,$$

wobei M die Masse eines Grammoleküls (Molmasse) Gas darstellt. Ein Gas wird dann als ideales Gas bezeichnet, wenn es die Zustandsgleichung

$$pV = nRT$$

vollkommen erfüllt und wenn es eine nur von der Temperatur abhängige innere Energie hat. Wenn sich bei der infinitesimalen Zustandsänderung eines Mols eines idealen Gases seine Temperatur um den Betrag $\mathrm{d}T$ ändert, dann ändert sich seine innere Energie um

$$\mathrm{d}U = C_v \, \mathrm{d}T.$$

Wenn uns eine bestimmte Gasmenge der Masse m vorliegt, dann enthält diese die Zahl $n = m/M$ Mole, so daß wir finden

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_v \, \mathrm{d}T = mc_v \, \mathrm{d}T.$$

Der Zusammenhang zwischen der Molwärme eines idealen Gases bei konstantem Druck und der Molwärme bei konstantem Volumen wird durch die MAYERsche Gleichung ausgedrückt:

$$C_p - C_v = R.$$

Für die spezifischen Wärmekapazitäten gilt dann

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}.$$

Der I. Hauptsatz der Thermodynamik hat für eine beliebige Gasmenge die folgende Form:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W' = nC_v \, \mathrm{d}T + p \, \mathrm{d}V.$$

Es seien nunmehr einige einfache Zustandsänderungen eines idealen Gases vorgestellt.

1. **Isochore** Zustandsänderung:

Das Volumen des Gases bleibt konstant, es ist $\mathrm{d}V = 0$;

$$\mathrm{d}W' = 0; \quad \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U; \quad Q = \int_1^2 \mathrm{d}Q = \int_1^2 \mathrm{d}U = U_2 - U_1.$$

Das Gas kann Energie nur durch Wärme aufnehmen oder abführen.

2. **Isotherme** Zustandsänderung:

Die Temperatur des Gases bleibt konstant, es ist $dT = 0$;

$$dU = nC_v\, dT = 0; \quad dQ = dW'; \quad Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 dW' = W'.$$

Das Gas erhält nur auf einem Wege Energie, z. B. durch Wärme (Arbeit), doch gibt es gleichzeitig an seine Umgebung die gleiche Menge an Energie auf eine andere Art ab, durch Arbeit (Wärme). Kurzgefaßt kann man den Sachverhalt ausdrücken: *Die gesamte, dem System von außen zugeführte Wärme (Arbeit) wird in mechanische Arbeit (Wärme) umgewandelt.*

3. **Adiabatische** Zustandsänderung:

Sie verläuft bei vollständiger Wärmeisolierung des Systems, d. h., es ist $dQ = 0$;

$$dW' = -dU; \quad W' = \int_1^2 dW = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2.$$

Das Gas erhält Energie nicht durch Wärme, sondern nur durch Arbeit zugeführt. Analog kann das Gas an seine Umgebung Energie nur durch Arbeit (nicht durch Wärme) abgeben. Die vom Gas verrichtete Arbeit ist gleich der Abnahme seiner inneren Energie.

Der Zusammenhang zwischen dem Druck und dem Volumen des Gases wird durch die POISSONsche Gleichung ausgedrückt:

$$pV^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} = \text{const}$$

($\varkappa = C_p/C_v$, p_0 Druck, V_0 Volumen des Gases im Anfangszustand).

Der CARNOTsche Kreisprozeß verläuft als ein Zyklus von vier aufeinanderfolgenden umkehrbaren Prozessen, von denen je zwei isotherm (I. und III.) sind, die bei den Temperaturen T_1 und T_2 verlaufen, und zwei adiabatisch (II. und IV.). Das Arbeitsmedium wird durch ein Mol oder Kilomol eines idealen Gases dargestellt.

Im Verlauf eines Zyklus entnimmt das Gas einem Wärmespeicher der Temperatur T_1 die Wärmemenge Q_1, führt an einen Wärmespeicher der Temperatur T_2 die Wärmemenge Q_2' ab und verrichtet die Arbeit

$$W' = Q_1 - Q_2'.$$

Der Quotient aus der vom Gase verrichteten Arbeit W' und der bei einer höheren Temperatur T_1 aufgenommenen Wärme Q_1 stellt den sog. Wirkungsgrad des CARNOT-

Prozesses dar:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Wenn der CARNOT-Prozeß entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, nimmt das Gas bei einer niedrigeren Temperatur T_2 von einem Wärmespeicher die Wärme Q_2 auf, nimmt eine bestimmte Menge mechanischer Wärme W aus der Umgebung auf und gibt an einen Wärmespeicher der höheren Temperatur T_1 sowohl die bei T_2 aufgenommene Wärme als auch die in Wärme umgewandelte, von außen aufgenommene mechanische Arbeit ab. Sein Wirkungsgrad beträgt hierbei

$$\eta = \frac{W}{W + Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Auf diesem Prinzip basiert die Arbeitsweise einer *Kältemaschine.*
Die **Entropie** stellt eine Zustandsgröße dar, die folgendermaßen ermittelt wurde: Wenn bei infinitesimaler Änderung seines Zustands ein Stoffsystem bei der Temperatur T auf umkehrbarem Wege die Wärmemenge $\mathrm{d}Q$ aufnimmt, dann ändert sich seine Entropie um den Wert

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Die Gesamtänderung der Entropie eines Gases bei seiner Überführung aus einem Anfangszustand (1) in einen Endzustand (2) ist

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}.$$

Durch diese Beziehung kann nur die Änderung der Entropie, nicht aber ihr Wert bestimmt werden.
Die Änderung der Entropie eines idealen Gases beim Übergang aus einem Zustand, in dem es durch die Zustandsgrößen p_0, V_0 und T_0 gekennzeichnet war, in einen anderen Zustand, in dem diese Größen die Werte p, V und T annehmen, ist durch die folgende Beziehung gegeben:

$$\Delta S = \int_{(0)}^{(1)} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = nR \ln \frac{V}{V_0} + \mathrm{n}C_v \ln \frac{T}{T_0}.$$

Bei umkehrbaren adiabatischen Prozessen ändert sich die Entropie eines Stoffsystems nicht, sie bleibt konstant. Bei allen nicht umkehrbaren Prozessen, die in –

gegenüber der Umgebung thermisch isolierten – Systemen verlaufen, vergrößert sich die Entropie.
Außer den Größen p, V, T, U und S, die Funktionen des Systemzustands darstellen, werden in der Thermodynamik noch weitere Zustandsgrößen verwendet, z. B.

1. **Enthalpie** H,
die durch die folgende Beziehung definiert wird:

$$H = U + pV;$$

2. **freie Energie** F,
die durch eine weitere Beziehung definiert wird:

$$F = U - TS.$$

Aus der Definition dieser Größe ist ersichtlich, daß die von einem Stoffsystem bei der umkehrbaren isothermen Änderung seines Zustands verrichtete Arbeit gleich dem Zuwachs seiner freien Energie ist:

$$-(\mathrm{d}F)_T = \mathrm{d}W'.$$

3. **potentielle thermodynamische Energie** G,
die folgendermaßen definiert wird:

$$G = U - TS + pV = H - TS.$$

Bei umkehrbaren Zustandsänderungen eines Systems, wenn das System nur Volumenarbeit verrichten kann, ist das Differential der potentiellen thermodynamischen Energie wie folgt bestimmt:

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T.$$

Die GIBBSsche Phasenregel bestimmt die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems mittels der Anzahl der Phasen p und der Komponenten k, aus denen sich das System zusammensetzt, gemäß der Beziehung

$$f = k + 2 - p.$$

Unter der Zahl der Freiheitsgrade verstehen wir die Zahl der Zustandsgrößen (z. B. Druck, Temperatur usw.), die man zumindest innerhalb eines bestimmten Bereichs variieren kann, ohne daß sich dadurch die Zahl der Phasen des Systems verändert.

B Beispiele

148. Eine Stahlkugel fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aus einer Höhe $h = 20$ m herab und wird nach dem Aufprall auf eine elastische Unterlage bis auf die Höhe $h_0 = 4$ m zurückgeworfen. Um wieviel Grad erhitzt sie sich dabei, wenn wir

voraussetzen, daß nur 60% der Arbeit, die bei der Deformation der Kugel im Moment ihres Aufpralls verrichtet wird, zur Erhöhung ihrer inneren Energie beitragen sollen?

Lösung

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie muß die Gesamtenergie, welche die Kugel zu Beginn ihres Falles aus der Anfangshöhe besaß,

$$W = mgh + \frac{1}{2} mv_0^2,$$

erhalten bleiben. Unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Kugel beim Zurückprallen nur bis in eine Höhe $h_0 < h$ aufsteigt, wird ein Teil der Energie an die Umgebung abgeführt, und somit erhöht sich durch die Deformationsarbeit sowohl die innere Energie der Kugel als auch die Energie der Umgebung. Für die Deformationsarbeit kann man in Übereinstimmung mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie wie folgt schreiben:

$$W = mgh + \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh_0. \tag{1}$$

Ein Teil dieser Arbeit, und zwar der Betrag $W' = 0{,}6\ W$, trägt zur Erhöhung der inneren Energie der Kugel selbst bei, was sich durch eine Erhöhung ihrer Temperatur äußert. Offensichtlich in gleicher Weise würde sich die Temperatur erhöhen, wenn die Kugel von außen Energie in Form von Wärme zugeführt bekäme, im Wert

$$Q = mc\,\Delta t,$$

wobei Δt die Temperaturerhöhung der Kugel bedeutet.
In Hinsicht auf die Gleichwertigkeit der Arbeit W' und der Wärme Q können wir schreiben

$$W' = 0{,}6\ W = JQ = Jmc\Delta t.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (1) gilt dann

$$Jmc\Delta t = 0{,}6\left(mgh + \frac{1}{2} mv_0^2 - mgh_0\right),$$

woraus wir nach kurzer Umformung erhalten

$$\Delta t = 0{,}6 \frac{2g(h - h_0) + v_0^2}{2Jc},$$

d. h.,

$$\Delta t = 0{,}6 \frac{2 \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} \cdot 16\ \text{m} + 16\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}}{2 \cdot 4{,}18\ \text{J cal}^{-1} \cdot 0{,}1 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}} = \underline{0{,}23\ \text{K}}.$$

149. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich eine Bleikugel bewegen, damit sie beim Aufprall auf eine unelastische Wand schmilzt? Die ursprüngliche Temperatur der Kugel betrage $t_1 = 27$ °C, der Schmelzpunkt des Bleis liegt bei $t_2 = 327$ °C. Wir setzen voraus, daß die gesamte kinetische Energie der Kugel vollständig in ihre innere Energie übergeht.

Lösung

Beim Aufprall auf die unelastische Wand bleibt die Kugel in ihr hängen; ihre gesamte kinetische Energie wird durch die Verformungsarbeit

$$W = \frac{1}{2} mv^2 \tag{1}$$

auf die Kugel übertragen und erhöht ihre innere Energie.
Die von der Kugel aufgenommene Energie soll dazu ausreichen, sie bis zur Schmelztemperatur zu erhitzen und vollständig zu schmelzen. Dieses Erhitzen und das Schmelzen würden auch dann eintreten, wenn der Kugel von außen die Energie Q in Form von Wärme zugeführt worden wäre. Für das Erhitzen der Kugel von t_1 auf t_2 und für ihr Schmelzen bei der Temperatur t_2 würde folgende Wärme benötigt:

$$Q = mc(t_2 - t_1) + ml, \tag{2}$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität und l die Schmelzwärme des Bleis darstellt. Unter Berücksichtigung der Gleichwertigkeit der Wärme Q und der Arbeit W können wir auch schreiben

$$W = JQ,$$

und unter Berücksichtigung der Gln. (1) u. (2) erhalten wir

$$Jmc(t_2 - t_1) + Jml = \frac{1}{2} mv^2,$$

also

$$v^2 = 2Jc(t_2 - t_1) + 2Jl,$$

d. h.,

$$v = \sqrt{2 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,cal^{-1}}\, 0{,}03 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}}\, 300\,\mathrm{K} + 2 \cdot 4{,}18\,\mathrm{J\,cal^{-1}}\, 5 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}}} =$$
$$= \underline{340\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

150. Eine Arbeitsmaschine rotiert mit der Tourenzahl $n = 1200\,\mathrm{U\,min^{-1}}$ und wird ständig durch eine wassergekühlte Bremse gestoppt. Das Moment der Reibungskräfte ist $M = 500\,\mathrm{kpm} = 4{,}9\,\mathrm{kNm}$. Der Bremsvorrichtung wird stündlich eine Wassermenge $m = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ mit der Temperatur $t = 10\,°\mathrm{C}$ zugeleitet. Berechnen Sie, welche Temperatur das abfließende Wasser haben wird, wenn wir voraussetzen, daß nur 75 % der Arbeit der Reibungskräfte zur Erhöhung der inneren Energie des Kühlwassers beitragen.

Lösung

Die Reibungskräfte, deren Moment M konstant ist, verrichten bei der Drehung eines Körpers um den Winkel φ die Arbeit

$$W = M\varphi. \tag{1}$$

Durch diese Arbeit erhöht sich die innere Energie des Wassers und auch die der Umgebung. Ein Teil dieser Arbeit vom Betrag $W_0 = 0{,}75\,W$ erhöht die innere Energie des Wassers, das der Bremsvorrichtung zugeführt wird, was sich in einer Temperaturerhöhung

um den Betrag Δt äußern muß. Ebenso würde sich die Temperatur erhöhen, wenn dem Kühlwasser von außen die Energie Q in Form von Wärme zugeführt würde. Für die Erwärmung des Wassers der Masse m um die Temperatur Δt wird eine Wärmemenge vom Betrag

$$Q = mc\Delta t \qquad (2)$$

benötigt.
Unter Berücksichtigung der Gleichwertigkeit von Arbeit W und Wärme Q kann die Gleichung

$$W_0 = JQ \qquad (3)$$

erfüllt werden. Durch einen Vergleich der Gln. (1), (2) u. (3) erhalten wir

$$mc\Delta t = 0{,}75 \frac{M}{J} \varphi. \qquad (4)$$

Die Maschine rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$, und in der Zeit t dreht sie sich um den Winkel $\varphi = 2\pi nt$. Wenn wir in Gl. (4) φ durch den Ausdruck $2\pi nt$ ersetzen, erhalten wir für die Erhöhung der Temperatur

$$\Delta t = \frac{2\pi Mnt}{Jmc} 0{,}75.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$\Delta t = 0{,}75 \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 9{,}81 \text{ Nm} \frac{1200}{60} \text{ s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s}}{4{,}18 \text{ J cal}^{-1}\, 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ cal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} = \underline{49{,}8 \text{ K}}.$$

Da die Anfangstemperatur des Wassers bereits 10 °C betrug, wird die Temperatur des abfließenden Kühlwassers den Wert <u>59,8 °C</u> aufweisen.

151. Ein Stoffsystem hat aus seiner Umgebung die Wärmemenge $Q = 1$ kcal aufgenommen und gleichzeitig eine äußere Arbeit vom Wert $W' = 1680$ J verrichtet. Ermitteln Sie, wie sich bei diesem Prozeß die innere Energie des Stoffsystems veränderte.

Lösung

Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik wird die einem System von außen durch Wärme zugeführte Energie einmal zur Änderung der inneren Energie ΔU des Systems benötigt, zum anderen wird sie an die äußere Umgebung in Form von Arbeit W' abgeführt:

$$Q = \Delta U + W'. \qquad (1)$$

In dieser Gleichung müssen alle Größen in gleichen Einheiten ausgedrückt werden. Unter Berücksichtigung der Äquivalenz von Arbeit und Wärme ist der Wärmemenge Q die Arbeit

$$W = JQ$$

gleichwertig, und wir erhalten nach Einsetzen in Gl. (1) die Beziehung

$$\Delta U = JQ - W',$$

d. h.,

$$\Delta U = 4{,}18 \text{ J cal}^{-1} \cdot 1000 \text{ cal} - 1680 \text{ J} = \underline{2500 \text{ J}}.$$

152. Bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität eines Gasgemisches, bestehend aus den Komponenten $m_1 = 3$ g CO, $m_2 = 6{,}1$ g N_2, $m_3 = 2{,}2$ g O_2, wenn die spezifischen Wärmekapazitäten c_{vi} jeder einzelnen Komponente bekannt sind.

Lösung

Die zur Erwärmung des Gasgemischs notwendige Wärme ist gleich der Summe der zur Erwärmung jeder einzelnen Komponente erforderlichen Wärme. Wenn wir dem Gemisch unter Konstanthaltung des Volumens (bzw. Drucks) Wärme zuführen, finden wir für die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität

$$c_v = \frac{(\mathrm{d}Q)_v}{m\,\mathrm{d}T} \quad \text{bzw.} \quad c_p = \frac{(\mathrm{d}Q)_p}{m\,\mathrm{d}T},$$

als auf das ganze Gemisch anwendbar entsprechend

$$mc_v\,\mathrm{d}T = m_1c_{v1}\,\mathrm{d}T + m_2c_{v2}\,\mathrm{d}T + m_3c_{v3}\,\mathrm{d}T$$

und

$$mc_p\,\mathrm{d}T = m_1c_{p1}\,\mathrm{d}T + m_2c_{p2}\,\mathrm{d}T + m_3c_{p3}\,\mathrm{d}T,$$

woraus wir folgern

$$c_v = \frac{m_1c_{v1} + m_2c_{v2} + m_3c_{v3}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$c_p = \frac{m_1c_{p1} + m_2c_{p2} + m_3c_{p3}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir schließlich

$$c_v = \frac{(3 \cdot 0{,}178 + 6{,}1 \cdot 0{,}177 + 2{,}2 \cdot 0{,}155)\text{ g cal g}^{-1}\text{ K}^{-1}}{(3 + 6{,}1 + 2{,}2)\text{ g}} =$$

$$= \underline{0{,}173 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1}}.$$

Die spezifischen Wärmekapazitäten c_{pi} bestimmen wir mit Hilfe der MAYERschen Gleichung. Wenn C_p und C_v die Wärmekapazitäten eines Grammoleküls Gas darstellen, dann ist nach der MAYERschen Gleichung

$$C_p - C_v = R.$$

Da der Zusammenhang zwischen der spezifischen Wärmekapazität eines Grammoleküls und der Masseneinheit durch die Beziehung

$$C = Mc$$

ausgedrückt werden kann, wobei M die Masse eines Grammoleküls ist, wird ersichtlich, daß

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

ist.

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$c_{p1} = 0{,}178 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal K}^{-1}\text{ mol}^{-1}}{28 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}249 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1},$$

$$c_{p2} = 0{,}177 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal K}^{-1}\text{ mol}^{-1}}{28 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}248 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1},$$

$$c_{p3} = 0{,}157 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1} + \frac{1{,}98 \text{ cal K}^{-1}\text{ mol}^{-1}}{32 \text{ g mol}^{-1}} = 0{,}219 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1},$$

und für das Gasgemisch folgt schließlich

$$c_p = \frac{3 \cdot 0{,}249 + 6{,}1 \cdot 0{,}248 + 2{,}2 \cdot 0{,}219}{3 + 6{,}1 + 2{,}2} \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1} = \underline{0{,}243 \text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1}}.$$

153. In einem mit beweglichem Kolben verschlossenen Zylinder befindet sich Wasserstoff der Masse $m = 36$ g bei einer Temperatur $t_1 = 27$ °C und unter einem Druck $p_1 = 4$ atm. Dieser Wasserstoff wird auf ein Drittel seines ursprünglichen Volumens komprimiert, wozu eine Arbeit $W = 1{,}5 \cdot 10^5$ J aufgewendet werden muß. Gleichzeitig wurde ihm durch Kühlung die Wärmemenge $Q = 14{,}22 \cdot 10^3$ cal entzogen.
Berechnen Sie den Druck und die Temperatur des Wasserstoffs nach erfolgter Kompression.

Lösung

Nach dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W,$$

wobei

$$\mathrm{d}U = nC_v\,\mathrm{d}T = mc_v\,\mathrm{d}T.$$

Für die ganze durchlaufene Zustandsänderung wird

$$\int_{T_1}^{T} mc_v\,\mathrm{d}T = \int_1^2 \mathrm{d}Q + \int_1^2 \mathrm{d}W,$$

d. h.,

$$mc_v(T_2 - T_1) = Q + W,$$

woraus folgt

$$T_2 = T_1 + \frac{Q + W}{mc_v}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die vom System aufgenommene Wärme Q negativ ist und das System nach außen die positive Wärme $Q' = -Q$ abgibt, finden wir

$$T_2 = T_1 + \frac{W - Q'}{mc_v},$$

$$T_2 = 300\text{ K} + \frac{1{,}5 \cdot 10^5\text{ J} \cdot 0{,}239\text{ cal J}^{-1} - 14{,}22 \cdot 10^3\text{ cal}}{36 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot 2{,}42 \cdot 10^3\text{ cal kg}^{-1}\text{ K}^{-1}} = 548\text{ K},$$

d. h.,

$$\underline{t_2 = 275\ °\text{C}.}$$

Für den Druck p_2 erhalten wir aus der Zustandsgleichung die Beziehung

$$p_2 = \frac{mRT_2}{MV_2} = \frac{3mRT_2}{MV_1},$$

und da für V_1 gilt

$$V_1 = \frac{mRT_1}{p_1 M},$$

finden wir

$$p_2 = 3p_1 \frac{T_2}{T_1},$$

d. h.,

$$p_2 = 3 \cdot 4\text{ atm} \frac{548\text{ grd}}{300\text{ grd}} = \underline{22\text{ atm} = 2{,}22\text{ MPa}}.$$

154. Ein Gas, das bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr und der Temperatur $t_0 = 20$ °C ein Volumen $V_0 = 830$ l einnahm, wird komprimiert. Für die Kompression wird eine Arbeit $W = 166770$ J verrichtet. Berechnen Sie den nach der Kompression vorliegenden Wert des Volumens, des Drucks und der Temperatur unter der Voraussetzung, daß das Gas bei der Kompression entsprechend dem Gesetz $pV^n = \text{const}$ behandelt wird, wobei $n = 1{,}25$ ist.

Lösung

Das Gas verrichtet bei der Änderung seines Volumens von V_0 auf V_1 die Arbeit

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV.$$

In unserem Fall wird das Gas komprimiert, die Arbeit W', die das Gas nach außen verrichtet, ist negativ; zur Kompression des Gases mußte also von außen die positive Arbeit $W = -W'$ zugeführt werden. Daher gilt

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p\, dV. \tag{1}$$

Das auf der rechten Seite von Gl. (1) stehende Integral können wir ausrechnen, indem wir mit der Gl. $pV^n = p_0 V_0^n = \text{const}$ die Größe p ausdrücken und in Gl. (1) einsetzen. Somit erhalten wir

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p_0 \frac{V_0^n}{V^n}\,\mathrm{d}V = -p_0 V_0^n \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^n}\,\mathrm{d}V = \frac{p_0 V_0^n}{n-1}\left(V_1^{1-n} - V_0^{1-n}\right),$$

woraus wir für das Volumen des Gases nach der Zustandsänderung finden

$$V_1^{1-n} = \frac{(n-1)\,W + p_0 V_0}{p_0 V_0^n}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$V_1^{-1/4} = \frac{\frac{1}{4}\,166770\ \mathrm{J} + 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}} \cdot 0{,}83\ \mathrm{m^3}}{1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}\,(0{,}83\ \mathrm{m^3})^{5/4}},$$

woraus wir entnehmen

$$\underline{V_1 = 0{,}166\ \mathrm{m^3}.}$$

Der sich einstellende Enddruck p_1 kann aus der Gleichung

$$p_1 V_1^n = p_0 V_0^n$$

bestimmt werden, indem wir finden

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right) = 1\ \mathrm{atm} \left(\frac{0{,}83\ \mathrm{m^3}}{0{,}166\ \mathrm{m^3}}\right)^{5/4} = \underline{7{,}5\ \mathrm{atm} = 0{,}76\ \mathrm{MPa}}.$$

Für die Ermittlung der Endtemperatur wenden wir die Gleichung

$$p_0 V_0^n = p_1 V_1^n$$

an, in die wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} \frac{T_1}{T_0}$$

einsetzen,

so daß wir aus der Umformung erhalten

$$p_0^{1-n} T_0^n = p_1^{1-n} T_1^n,$$

woraus resultiert

$$T_1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_0.$$

Mit den gegebenen Werten folgt

$$T_1 = \left(\frac{1\ \text{atm}}{7{,}5\ \text{atm}}\right)^{-1/5} \cdot 293\ \text{K} = 438{,}3\ \text{K},$$

d. h.,

$$\underline{t_1 = 165\ °\text{C}.}$$

155. Eine bestimmte Menge Helium vergrößert bei konstantem Druck $p_0 = 2$ atm ihr Volumen vom Ausgangswert $V_0 = 3$ l auf den doppelten Wert. Berechnen Sie die dafür notwendige Wärmezufuhr. Die POISSONsche Konstante für Helium ist $\varkappa = 1{,}67$.

Lösung

Entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M} C_v\, \mathrm{d}T + p\, \mathrm{d}V.$$

Für die Zustandsänderung ist bei konstantem Druck $p = p_0$ und $V_1 = 2V_0$, und wir erhalten nach Integration

$$Q = \frac{m}{M} C_v\, (T_1 - T_0) + p_0 V_0. \tag{1}$$

Jedoch gilt gemäß der Zustandsgleichung

$$\frac{m}{M} T_1 - \frac{m}{M} T_0 = \frac{p_0 2 V_0}{R} - \frac{p_0 V_0}{R} = \frac{p_0 V_0}{R},$$

was nach Einsetzen in Gl. (1) ergibt

$$Q = \frac{C_v}{R} p_0 V_0 + p_0 V_0 = \frac{C_v + R}{R} p_0 V_0.$$

Unter Anwendung der MAYERschen Gleichung können wir weiterhin schreiben

$$Q = \frac{C_p}{R} p_0 V_0.$$

Da $C_p/C_v = \varkappa$ und $C_p - C_v = R$ ist, wird

$$C_p = \varkappa\, C_v = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R,$$

so daß wir finden

$$Q = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_0 V_0.$$

Mit den in der Aufgabe vorgegebenen Werten folgt

$$Q = \frac{1{,}67}{0{,}67} 2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = \underline{1515\ \text{J} = 362\ \text{cal}.}$$

156. Berechnen Sie, welche Wärmemenge bei der Kompression von $m = 45$ g Kohlendioxid der Temperatur $t_1 = -15$ °C vom Druck $p_1 = 23\ \mathrm{N\,cm^{-2}}$ auf den Druck $p_2 = 58\ \mathrm{N\,cm^{-2}}$ durch Kühlung abgeführt werden muß, damit die Kompression bei Temperaturkonstanz, also isotherm, ausgeführt werden kann.

Lösung

Bei einem isothermen Prozeß bleibt die innere Energie eines idealen Gases konstant. Bei der Veränderung seines Volumens vom Wert V_1 auf den Wert V_2 verrichtet das Gas durch Umwandlung der aufgenommenen Wärme Q die Arbeit

$$W' = Q = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

Dieser Ausdruck kann integriert werden, wenn wir für den Druck aus der Zustandsgleichung den Ausdruck

$$p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$$

einsetzen. Dann ergibt sich

$$W' = Q = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Bei einer isothermen Änderung gilt entsprechend dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz die Beziehung

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

und daher finden wir

$$W' = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2} = Q.$$

Da der Druck $p_1 < p_2$ ist, wird diese Arbeit (ebenfalls natürlich die aufgenommene Wärme) negatives Vorzeichen haben. Für eine isotherme Kompression ist es notwendig, von außen die positive Arbeit $W = -W'$ zuzuführen, die vollkommen in Wärme umgewandelt wird. Diese Wärme muß dem Gas durch Abkühlung entzogen werden. Für sie gilt

$$Q' = W = -\frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2},$$

also

$$Q' = \frac{45\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{44\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}}\, 8{,}31\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}} \cdot 258\ \mathrm{K} \cdot 2{,}3\ \lg\frac{23\ \mathrm{N\,cm^{-2}}}{58\ \mathrm{N\,cm^{-2}}} =$$

$$= \underline{2026\ \mathrm{J} = 484\ \mathrm{cal}.}$$

157. Ein Kompressor saugt in jeder Stunde atmosphärische Luft vom Volumen $V_0 = 150\ \mathrm{m}^3$ an und komprimiert sie auf einen Druck von $p_1 = 108\ \mathrm{N\,cm}^{-2}$. Während der Kompression wird die Luft durch einen Wasserstrom gekühlt, so daß man die Kompression als einen isothermen Prozeß betrachten kann. Berechnen Sie den Wasserstrom, der stündlich durch die Kühlvorrichtung fließt, wenn das Wasser von $t_0 = 10\ °\mathrm{C}$ auf $t_1 = 18\ °\mathrm{C}$ erwärmt wird. Der Außendruck der Luft hat den Wert $p_0 = 1\ \mathrm{at} = 9{,}8 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$.

Lösung

Das durch die Kühlvorrichtung strömende Wasser nimmt in jeder Stunde Wärme vom Betrag Q' auf und erwärmt sich dadurch um die Temperaturdifferenz Δt, wobei offenbar die Beziehung

$$Q' = mc\Delta t$$

erfüllt wird, so daß sich ergibt

$$m = \frac{Q'}{c\Delta t}. \tag{1}$$

Die Kompression ist ein isothermer Prozeß, d. h., die innere Energie des Gases bleibt konstant, und die von außen zugeführte Gesamtarbeit W wandelt sich in die Wärme Q' um, die ihrerseits mit dem Kühlwasser abgeführt wird.
Nach dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = Q'.$$

Wenn wir für den Druck p aus dem BOYLE-MARIOTTEschen Gesetz den Ausdruck

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} \tag{2}$$

einsetzen, finden wir

$$Q' = \int_{V_1}^{V_0} \frac{p_0 V_0}{V}\,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_1}.$$

Da nach Gl. (2) auch $\dfrac{V_0}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_0}$ ist, gilt weiterhin

$$Q' = p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}.$$

Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir für die gesuchte Wassermenge die Beziehung

$$m = \frac{p_0 V_0 \ln \dfrac{p_1}{p_0}}{c\Delta t},$$

d. h.,

$$m = \frac{0{,}9807 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}} \cdot 150\,\mathrm{m^3} \cdot 2{,}3 \lg \frac{108}{9{,}8}}{1 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}} \cdot 8\,\mathrm{K}}\, 0{,}239\,\mathrm{cal\,J^{-1}} = \underline{1052\,\mathrm{kg}}.$$

158. In einem mit verschiebbarem Kolben verschlossenen Kreiszylinder der Höhe $l_1 = 0{,}5$ m befindet sich Luft bei einer Temperatur $t_1 = 20$ °C und unter einem Druck $p_1 = 760$ Torr. Auf welchen Betrag ändern sich Druck und Temperatur der eingeschlossenen Luft, wenn bei einer adiabatischen Kompression der Kolben um den Betrag $l_2 = 0{,}2$ m verschoben wird? Die POISSONsche Konstante für Luft hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Den nach der adiabatischen Kompression sich einstellenden Luftdruck bestimmen wir gemäß der POISSONschen Gleichung

$$p_1 V_1^\varkappa = p_2 V_2^\varkappa,$$

woraus wir finden

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\varkappa. \tag{1}$$

Vor Beginn der Kompression nahm die Luft ein Volumen der Größe $V_1 = \pi \frac{d^2}{4} l_1$ ein, nach der Kompression verringert sich das Volumen auf den Wert $V_2 = \pi \frac{d^2}{4}(l_1 - l_2)$. Nach Einsetzen dieser beiden Volumenangaben in Gl. (1) erhalten wir für den Druck die Beziehung

$$p_2 = p_1 \left(\frac{l_1}{l_1 - l_2}\right)^\varkappa,$$

d. h.,

$$p_2 = 1\,\mathrm{atm} \left(\frac{0{,}5}{0{,}3}\right)^{1{,}4} = \underline{2{,}04\,\mathrm{atm} = 2{,}07 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}.$$

Die Abhängigkeit der Temperatur des Gases von seinem Volumen erhalten wir für die adiabatische Zustandsänderung aus Gl. (1), in der wir den Druck p_2 durch den Ausdruck

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T_2}{V_2}$$

ersetzen. Nach geringfügiger Umformung erhalten wir

$$T_1 V_1^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1},$$

woraus wir finden

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1},$$

d. h.,

$$T_2 = 293\,\mathrm{K}\left(\frac{5}{3}\right)^{0,4} = 359{,}5\,\mathrm{K}$$

oder

$$\underline{t_2 = 86{,}5\,°\mathrm{C}.}$$

159. Aus einem Ballon, der Sauerstoff unter einem Druck $p_1 = 1140$ Torr enthält, wird plötzlich eine bestimmte Gasmenge abgelassen, wobei der Druck des Gases auf den Wert $p_2 = 760$ Torr abfällt. Dieser Prozeß kann als adiabatisch angesehen werden. Nach dem Verschließen des so entlasteten Ballons nimmt das eingeschlossene Restgas von außen Wärme auf, und zwar so lange, bis es seine ursprüngliche Temperatur wieder angenommen hat. Berechnen Sie, wieviel Prozent der ursprünglichen Gasmenge abgelassen wurde und welcher Gasdruck sich nach Beendigung des Prozesses einstellt.

Lösung

Für den Ausgangszustand gilt die Zustandsgleichung

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1. \tag{1}$$

Mit dem Ablassen einer Sauerstoffmenge der Größe Δm ändern sich Druck und Temperatur auf die neuen Werte p_2 bzw. T_2, und der Zusammenhang zwischen den neuen Zustandsgrößen wird wiederum von der Zustandsgleichung angegeben:

$$p_2 V_1 = \frac{m - \Delta m}{M} R T_2. \tag{2}$$

Wenn wir die Gln. (1) und (2) dividieren, erhalten wir

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \frac{T_1}{T_2}. \tag{3}$$

Da es sich beim Gasablassen um einen adiabatischen Prozeß handeln soll, können wir den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur mit Hilfe der POISSONschen Gleichung ausdrücken:

$$p_1 V_1^\varkappa = p_2 V_2^\varkappa,$$

in die wir für das Volumen V_2 den aus der Zustandsgleichung ermittelten Wert

$$V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1}$$

einsetzen. Nach Umformung erhalten wir

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \tag{4}$$

Wenn wir diesen Ausdruck in Gl. (3) einsetzen, finden wir

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{m - \Delta m}{m} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

und für die Menge des abgelassenen Gases ergibt sich in Prozenten

$$100\,\frac{\Delta m}{m} = 100\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right].$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte folgt

$$100\,\frac{\Delta m}{m} = 100\left[1 - \left(\frac{760}{1140}\right)^{\frac{1}{1,4}}\right] = \underline{25\,\%}.$$

Bei der anschließenden Wiedererwärmung erreicht das Gas wieder seine Ausgangstemperatur T_1 und den neuen Druck p_3. Gemäß der Zustandsgleichung gilt

$$\frac{p_3 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{T_2},$$

woraus wir finden

$$p_3 = p_2\,\frac{T_1}{T_2},$$

und nach Einsetzen von Gl. (4) für den Ausdruck $\frac{T_1}{T_2}$ erhalten wir

$$p_3 = p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 760\text{ Torr}\left(\frac{1140\text{ Torr}}{760\text{ Torr}}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = \underline{853{,}4\text{ Torr} = 113\,770\text{ Pa}}.$$

160. Wir vergrößern ein bestimmtes Volumen Stickstoff der Temperatur $t_0 = 27$ °C und des Drucks $p_0 = 760$ Torr einmal
a) isotherm und
b) adiabatisch
auf den doppelten Wert. Berechnen Sie, auf welchen Betrag sich dabei die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle und die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle verändert.

Lösung

a) Bei der isothermen Zustandsänderung bleibt die Temperatur konstant, also ändert sich auch die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle nicht:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}3\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1} \cdot 300\text{ K}}{28 \cdot 10^{-3}\text{ kg mol}^{-1}}} = \underline{516{,}4\text{ m s}^{-1}}.$$

Die Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle ändert sich von n_0 auf n_1. Für ihren Quotienten erhalten wir

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\dfrac{p_1}{kT_0}}{\dfrac{p_0}{kT_0}} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Nach dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE ist

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 \quad \text{und} \quad \frac{n_1}{n_0} = \frac{V_0}{V_1},$$

so daß wir finden

$$n_1 = \frac{1}{2} n_0 = \frac{1}{2} \frac{p_0}{kT_0} = \frac{p_0 N_A}{2RT_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{2 \cdot 0{,}082\,1 \text{ atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} =$$

$$= 1{,}225 \cdot 10^{22}\,\text{l}^{-1} = \underline{1{,}225 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}}.$$

Im Ausgangszustand ist $n_0 = 2n_1 = 2{,}45 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}.

b) Durch die adiabatische Zustandsänderung, d. h. bei Änderung des Volumens von V_0 auf V_2, ändert sich die Temperatur des Gases auf T_2. Mit Hilfe der POISSONschen Gleichung (vgl. Aufg. 158!) kann man sie aus folgender Beziehung ermitteln:

$$T_0 V_0^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1}. \tag{1}$$

Da für Stickstoff $\varkappa = 1{,}4$ ist, können wir schreiben

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = 300 \text{ K} \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}4} = 227{,}3 \text{ K}.$$

Für die mittlere Geschwindigkeit erhalten wir den Wert nach Vollzug der adiabatischen Zustandsänderung zu

$$\bar{v}' = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}3 \cdot 227{,}3}{28 \cdot 10^{-3}}} \text{ m s}^{-1} = \underline{449{,}5 \text{ m s}^{-1}}.$$

Da wir die Zahl der Moleküle je Volumeneinheit nach Vorliegen der adiabatischen Zustandsänderung – n_2 – bestimmen wollen, müssen wir den sich einstellenden Enddruck kennen. Wir ermitteln diesen aus der POISSONschen Gleichung

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa},$$

woraus wir finden

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

und

$$n_2 = \frac{p_2}{kT_2} = \frac{p_0}{kT_2} \left(\frac{V_0}{V_2}\right).$$

Wenn wir hier den Wert für T_2 aus der Gl. (1) einsetzen, erhalten wir nach Umformung

$$n_2 = \frac{p_0}{kT_0}\frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{2}n_0.$$

Also wird – nach Durchlaufen der isothermen und der adiabatischen Zustandsänderung – die auf die Volumeneinheit entfallende Anzahl von Molekülen gleich sein. Dieser Umstand wird aus dem Verhalten des Gases deutlich, das in beiden Fällen sein Volumen verdoppelt.

161. In einem Ballon befindet sich ein Gemisch aus zwei chemisch nicht aufeinander wirkenden Gasen. Leiten Sie für den Fall einer adiabatischen Zustandsänderung die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen ab.

Lösung

Gemäß dem Gesetz von Dalton wird in einem Gemisch von chemisch nicht aufeinander wirkenden Gasen jedes Gas so behandelt, als ob ihm allein der gesamte verfügbare Raum V zustünde.
Wenn n_1 und n_2 die Anzahl der Grammoleküle der einzelnen Komponenten im Gemisch, C_{v1} und C_{v2} die zugehörigen, auf ein Grammolekül bezogenen Wärmekapazitäten und p_1 und p_2 die Partialdrücke darstellen, dann ändert sich die innere Energie des Gasgemischs bei differentieller Zustandsänderung um

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = n_1C_{v1}\,\mathrm{d}T + n_2C_{v2}\,\mathrm{d}T,$$

und es wird die Arbeit

$$\mathrm{d}W' = \mathrm{d}W_1' + \mathrm{d}W_2' = p_1\,\mathrm{d}V + p_2\,\mathrm{d}V$$

verrichtet.
Gemäß dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt für die adiabatische Zustandsänderung in diesem Fall ($\mathrm{d}Q = 0$)

$$n_1C_{v1}\,\mathrm{d}T + n_2C_{v2}\,\mathrm{d}T + p_1\,\mathrm{d}V + p_2\,\mathrm{d}V = 0.$$

Wenn wir für p_1 und p_2 entsprechend der Zustandsgleichung die Ausdrücke

$$p_1 = \frac{n_1RT}{V}, \quad p_2 = \frac{n_2RT}{V}$$

einsetzen, erhalten wir die Beziehung

$$n_1C_{v1}\,\mathrm{d}T + n_2C_{v2}\,\mathrm{d}T + n_1RT\frac{\mathrm{d}V}{V} + n_2RT\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0.$$

Nach einer einfachen Umformung finden wir

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{n_1R + n_2R}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0,$$

und nach erfolgter Integration erhalten wir zunächst die Abhängigkeit der Temperatur vom Volumen zu

$$TV^{\frac{n_1R + n_2R}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}}} = k. \tag{2}$$

Um aber die Abhängigkeit $p(V)$ zu finden, setzen wir für T den aus der Zustandsgleichung resultierenden Ausdruck

$$pV = nRT$$

ein, wobei allerdings $p = p_1 + p_2$ und $n = n_1 + n_2$ ist. Wir erhalten damit

$$pV^{\frac{n_1R + n_2R}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}} + 1} = knR = \text{const},$$

woraus wir nach Umformung und unter Anwendung der MAYERschen Gleichung $C_p = C_v + R$ die gesuchte Abhängigkeit finden:

$$pV^{\frac{n_1C_{p1} + n_2C_{p2}}{n_1C_{v1} + n_2C_{v2}}} = \text{const}.$$

162. In einem mit Luft gefüllten und an beiden Enden verschlossenen Kreiszylinder befindet sich ein frei beweglicher, reibungsfrei gelagerter Kolben, der das Volumen des Zylinders in zwei Hälften unterteilt. Der Luftdruck hat auf beiden Seiten des Kolbens die gleiche Größe $p_0 = 760$ Torr. Wenn wir den Kolben geringfügig aus der Gleichgewichtslage ablenken und dann loslassen, beginnt er eine Schwingungsbewegung auszuführen. Berechnen Sie die Periodendauer dieser Schwingungen, wenn wir die Prozesse im Gas dabei als adiabatisch ansehen. Der Kolben hat die Masse $m = 1{,}5$ kg, sein Abstand von der Wand hat den Wert $l_0 = 0{,}2$ m, die Fläche des Kolbens hat den Betrag $A = 1 \cdot 10^{-2}$ m².

Lösung

Wenn wir den Kolben um eine kleine Strecke x z. B. nach rechts verschieben (Bild 87), so erhöht sich das Volumen im linken Teil des Zylinders auf den Wert $V_1 = V_0 + V = A(l_0 + x)$, und der Druck verringert sich von p_0 auf p_1, während im rechten Teil des Zylinders das verfügbare Volumen sich auf den Wert $V_2 = A(l_0 - x)$ verkleinert, wobei der Druck von p_0 auf p_2 anwächst. Wenn wir die bei geringfügigen Verschiebungen des Kolbens eintretenden Veränderungen als adiabatische Prozesse ansehen, so gilt die POISSONsche Gleichung

$$p_0V_0^\varkappa = p_1V_1^\varkappa,$$

$$p_0V_0^\varkappa = p_2V_2^\varkappa,$$

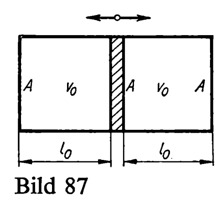


Bild 87

und nach Einsetzen für V_1 und V_2 erhalten wir

$$p_0l_0^\varkappa = p_1(l_0 + x)^\varkappa,$$

$$p_0l_0^\varkappa = p_2(l_0 - x)^\varkappa.$$

In der Grundstellung ist die auf den Kolben wirkende resultierende Kraft gleich Null. Nach erfolgter Auslenkung aus der Nullage wirkt auf den Kolben eine resultierende Druckkraft

$$F = (p_2 - p_1)A = Ap_0\left[\frac{l_0^\varkappa}{(l_0 - x)^\varkappa} - \frac{l_0^\varkappa}{(l_0 + x)^\varkappa}\right] =$$

$$= Ap_0l_0^\varkappa\frac{(l_0 + x)^\varkappa - (l_0 - x)^\varkappa}{(l_0^2 - x^2)^\varkappa}.$$

Bei nur geringfügiger Auslenkung kann die Größe x^2 gegenüber l_0^2 vernachlässigt werden, und analog kann in der binomischen Entwicklung $(l_0 \pm x)$ jedes Glied vernachlässigt werden, in dem die Auslenkung x in einer höheren als der ersten Potenz auftritt. Nach solcherart vorgenommener Vereinfachung wird

$$F = A(p_2 - p_1) = \frac{2Ap_0\varkappa}{l_0}x.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die auf den Kolben wirkende Kraft immer proportional zur momentanen Auslenkung aus der Nullage ist. Die Richtung der angreifenden Kraft ist parallel zur Richtung der Verschiebung. Daher können wir für die Kolbenbewegung folgende Bewegungsgleichung aufschreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{2Ap_0\varkappa}{ml_0} = \text{const.}$$

Der Kolben wird offenbar harmonische Schwingungen ausführen, deren Periodendauer sich ergibt zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{2p_0A\varkappa}}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}5\ \text{kg}\cdot 0{,}2\ \text{m}}{2\cdot 1{,}013\cdot 10^5\ \text{N}\,\text{m}^{-2}\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2\cdot 1{,}4}} = \underline{0{,}06\ \text{s}.}$$

163. Eine bestimmte Menge Luft sei in einem Volumen $V_0 = 10\ \text{l}$ bei einer Temperatur $t_0 = 0\ °\text{C}$ und dem Druck $p_0 = 1$ at enthalten. Sie wird zunächst isotherm auf das Volumen $V_1 = 2\ \text{l}$ komprimiert, um anschließend adiabatisch auf das Volumen $V_2 = 20\ \text{l}$ expandiert zu werden. Welche Lufttemperatur stellt sich nach Durchlaufen dieser Zustandsänderungen ein, und welche Gesamtarbeit muß dazu aufgebracht werden? Für Luft gilt $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Nach Durchlaufen der isothermen Zustandsänderung wird die Luft durch die Zustandsgrößen p_1, V_1 und T_1 charakterisiert sein. Für sie gilt entsprechend dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE

$$p_0V_0 = p_1V_1, \quad T_1 = T_0. \tag{1}$$

Nach Durchlaufen der adiabatischen Zustandsänderung werden Druck, Volumen und Temperatur des Gases die Werte p_2, V_2 und T_2 annehmen. Die sich einstellende Temperatur bestimmen wir aus der für die adiabatische Zustandsänderung geltenden Beziehung (vgl. Aufg. 158!)

$$T_1V_1^{\varkappa-1} = T_2V_2^{\varkappa-1}.$$

Unter Heranziehung von Gl. (1) können wir weiterhin schreiben

$$T_0V_1^{\varkappa-1} = T_2V_2^{\varkappa-1},$$

woraus wir für die gesuchte Temperatur T_2 die Beziehung erhalten

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich dafür

$$T_2 = 273\ \text{K} \left(\frac{21}{201}\right)^{1,4-1} = 108{,}6\ \text{K}; \quad \underline{t_2 = -164{,}4\ °\text{C}.}$$

Die Gesamtarbeit W', die das Gas verrichtet, wird gleich der Summe der beiden Arbeiten sein, die bei der isothermen Zustandsänderung (W'_{I}) und bei der adiabatischen Zustandsänderung (W'_{II}) auftreten. Für sie gilt

$$W'_{\text{I}} = \int \mathrm{d}W' = \int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V = \frac{m}{M} RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_0 V_0 \ln\frac{V_1}{V_0},$$

$$W'_{\text{II}} = \int \mathrm{d}W' = \int -\,\mathrm{d}U = -\int_{T_1}^{T_2} mc_v\,\mathrm{d}T = mc_v(T_1 - T_2). \tag{2}$$

Unter Anwendung der MAYERschen Gleichung stellen wir fest, daß

$$c_v = \frac{R}{M(\varkappa - 1)} \quad \text{(vgl. Aufg. 195!)}$$

Wir setzen das in Gl. (2) ein und erhalten nach Umformung

$$W'_{\text{II}} = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)}(T_1 - T_2) = \frac{mRT_1}{M(\varkappa - 1)}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Entsprechend der Zustandsgleichung ist aber

$$\frac{mRT_1}{M} = p_0 V_0,$$

so daß sich ergibt

$$W'_{\text{II}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Die vom Gas verrichtete Gesamtarbeit ist

$$W' = W'_{\text{I}} + W'_{\text{II}} = p_0 V_0 \ln\frac{V_1}{V_0} + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) =$$

$$= 1\ \text{at} \cdot 10\ \text{l} \cdot \ln\frac{2}{10} + \frac{1\ \text{at} \cdot 10\ \text{l}}{0{,}4}\left(1 - \frac{108{,}6}{273}\right) = 1{,}03\ \text{l at}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $1\ \text{l at} = 10^3\ \text{cm}^3\ \text{kp cm}^{-2} = 10\ \text{kpm} = 98{,}1\ \text{J}$ ist, ergibt sich

$$\underline{W' = -101\ \text{J}.}$$

Dem Gas muß also die Arbeit $W' = 101$ J zugeführt werden.

164. Eine bestimmte Gasmenge nimmt bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr ein Volumen $V_0 = 1$ l ein. Das Gas soll nacheinander folgenden Veränderungen unterzogen werden:
a) isobare Erwärmung bis zur Volumenverdopplung,
b) weitere isochore Erwärmung bis zur Druckverdopplung,
c) adiabatische Expansion, bis die Temperatur wieder am Ausgangswert angelangt ist.

Berechnen Sie, welche Gesamtwärme dem Gas während dieser Prozesse zugeführt wurde, welche Arbeit das Gas verrichtete und wie sich dabei seine innere Energie änderte. Die POISSONsche Konstante des betrachteten Gases hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.

Lösung

Bei jedem einzelnen Prozeß ermitteln wir die vom Gas verrichtete Arbeit, die Änderung seiner inneren Energie und die ihm zugeführte Wärme. Zur Berechnung wenden wir den I. Hauptsatz der Thermodynamik an, der für eine infinitesimale Zustandsänderung die folgende Form annimmt:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W', \quad \text{wobei} \quad \mathrm{d}W' = p\,\mathrm{d}V.$$

Für ein ideales Gas gilt

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_v \,\mathrm{d}T.$$

Da in unserem vorliegenden Fall die POISSONsche Konstante des Gases bekannt ist, bestimmen wir die spezifische Wärmekapazität eines Grammoleküls aus der Beziehung

$$C_v = \frac{R}{\varkappa - 1}$$

und

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \mathrm{d}T.$$

a) Isobare Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck $p_1 = p_0$, das Volumen $V_1 = 2\,V_0$, und für die Temperatur T_1 finden wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2 V_0}{T_1}; \quad T_1 = 2T_0.$$

Das Gas verrichtet die Arbeit

$$W_\mathrm{I}' = \int\limits_{V_0}^{2V_0} p_0 \,\mathrm{d}V = \underline{p_0 V_0}.$$

Seine innere Energie verändert sich um den Betrag

$$\Delta U_1 = \int\limits_{T_0}^{2T_0} \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \mathrm{d}T = \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} T_0$$

Entsprechend der Zustandsgleichung

$$\frac{mRT_0}{M} = p_0 V_0$$

gilt

$$\underline{\Delta U_{\mathrm{I}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}}.$$

Die dem Gas zugeführte Wärme wird

$$Q_{\mathrm{I}} = \Delta U_{\mathrm{I}} + W_{\mathrm{I}}' = p_0 V_0 + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} = \underline{p_0 V_0 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

b) Isochore Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck $p_2 = 2p_1 = 2p_0$, das Volumen $V_2 = V_1 = 2V_0$, und für die Temperatur erhalten wir aus der Zustandsgleichung den Wert

$$T_2 = 4T_0.$$

Da hierbei $V = \text{const}$ ist, wird die vom Gas verrichtete Volumenarbeit $\underline{W_{\mathrm{II}}' = 0}$. Die innere Energie ändert sich um den Betrag

$$\Delta U_{\mathrm{II}} = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \, \mathrm{d}T = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)} \int\limits_{2T_0}^{4T_0} \mathrm{d}T = \frac{2mRT_0}{M(\varkappa - 1)} = \underline{\frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1}}.$$

Im Verlauf der isochoren Zustandsänderung wird dem Gas die Wärme

$$Q_{\mathrm{II}} = W_{\mathrm{II}}' + \Delta U_{\mathrm{II}} = \underline{\frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1}}$$

zugeführt.

c) Adiabatische Zustandsänderung: Nach Durchlaufen dieser Zustandsänderung hat das Gas den Druck p_3 und das Volumen V_3, die Temperatur $T_3 = T_0$. Das Volumen V_3 bestimmen wir aus der Beziehung

$$T_3 V_3^{\varkappa - 1} = T_2 V_2^{\varkappa - 1},$$

welche die Abhängigkeit von Temperatur und Volumen bei der adiabatischen Zustandsänderung angibt (vgl. Aufg. 158!). Aus ihr erhalten wir

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \cdot V_2 = \left(\frac{4T_0}{T_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \cdot 2V_0 = 2^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}} V_0.$$

Gemäß der Poissonschen Gleichung

$$p_3 V_3^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

folgt für den Druck p_3

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\varkappa} = 2p_0 \left(\frac{2V_0}{2^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}} V_0}\right)^{\varkappa} = 2^{-\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}} p_0.$$

Beim adiabatischen Prozeß ist die vom Gas verrichtete Arbeit gleich der Abnahme seiner inneren Energie; daher gilt

$$W'_{\text{III}} = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V = -\int_{T_2}^{T_3} \frac{m}{M} C_v \, \mathrm{d}T = -\frac{m}{M} \frac{R}{\varkappa - 1} \int_{4T_0}^{T_0} \mathrm{d}T = \frac{mR}{M(\varkappa - 1)} 3T_0,$$

und unter Hinzuziehung der Zustandsgleichung erhalten wir dafür

$$\underline{W'_{\text{III}} = \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1}}.$$

Bei dieser Zustandsänderung nimmt das Gas weder Wärme auf, noch gibt es welche ab. Es ist also $\underline{Q_{\text{III}} = 0}$, und die Änderung der inneren Energie ergibt sich zu

$$\Delta U_{\text{III}} = -W'_{\text{III}} = \underline{-\frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1}}.$$

Insgesamt wird bei den angegebenen Zustandsänderungen die Arbeit

$$W' = W'_{\text{I}} + W'_{\text{II}} + W'_{\text{III}} = p_0 V_0 + \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = \underline{862 \text{ J}}$$

verrichtet und die Wärme

$$Q = Q_{\text{I}} + Q_{\text{II}} + Q_{\text{III}} = p_0 V_0 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = \underline{862 \text{ J}}$$

zugeführt. Damit ist die Änderung der inneren Energie

$$\Delta U = \Delta U_{\text{I}} + \Delta U_{\text{II}} + \Delta U_{\text{III}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1} - \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1} = \underline{0}.$$

165. Im Volumen V_0 eines Gefäßes befindet sich bei der Temperatur t_0 eine bestimmte Menge eines Gases bekannter Molmasse. Berechnen Sie, welche Arbeit für das Komprimieren dieser Gasmenge m auf ein Volumen V_1 notwendig ist und wie sich bei diesem Prozeß seine Temperatur ändert, wenn bei dieser Zustandsänderung das Gas dem Gesetz $pV^n = \text{const}$ folgt, wobei $1 < n < \varkappa$ ist.

Lösung

Das Gas verrichtet die Arbeit

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V.$$

Wenn wir in dieser Gleichung den Druck p aus der Beziehung

$$pV^n = p_0 V_0^n = \text{const}$$

ersetzen, finden wir

$$W' = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^n}{V^n} \, dV.$$

Nach Integration erhalten wir

$$W' = \frac{p_0 V_0^n}{1-n} (V_1^{1-n} - V_0^{1-n}).$$

Den Druck p_0 drücken wir unter Heranziehung der Zustandsgleichung aus:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0$$

und erhalten nach Umformung

$$W' = \frac{mRT_0}{M(n-1)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right].$$

Das Gas soll komprimiert werden, also ist es notwendig, von außen eine Arbeit

$$\underline{W = -W' = -\frac{mRT_0}{M(1-n)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right]}$$

zuzuführen. Die Temperaturabhängigkeit des Gasvolumens erhalten wir aus der Beziehung

$$p V^n = p_0 V_0^n,$$

worin wir die Werte für p und p_0 aus der Zustandsgleichung einfügen. Damit erhalten wir

$$\frac{mRT_0}{V_0} V_0^n = \frac{mRT}{V} V^n,$$

woraus sich ergibt

$$T V^{n-1} = T_0 V_0^{n-1} = \text{const.}$$

Für die gesuchte Temperatur T_1 finden wir

$$\underline{T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1}.}$$

166. Eine Carnot-Maschine arbeitet mit einem Wirkungsgrad $\eta_1 = 40\%$. Bei Konstanthaltung der Temperatur ihres unteren Wärmespeichers $t_2 = 9$ °C soll der Wirkungsgrad der Maschine auf den Wert $\eta_2 = 50\%$ gesteigert werden, indem die Temperatur ihres oberen Wärmespeichers erhöht wird. Um wieviel muß sie erhöht werden?

Lösung

Der Wirkungsgrad der Carnot-Maschine ist der Quotient aus der von der Maschine verrichteten Arbeit W' und der bei höherer Temperatur aufgenommenen Wärme Q_1

gemäß

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

woraus sich ergibt

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}.$$

Im ersten Fall ist

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta_1},$$

und im zweiten wird

$$T_1' = \frac{T_2}{1 - \eta_2}.$$

Für die gesuchte Temperaturänderung können wir also schreiben

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2(\eta_2 - \eta_1)}{(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)},$$

d. h.,

$$\Delta T = \frac{282 \text{ K} \cdot 0{,}1}{(1 - 0{,}4)(1 - 0{,}5)} = \underline{94 \text{ K}}.$$

167. Berechnen Sie, welche Arbeit eine nach dem Prinzip der CARNOT-Maschine funktionierende Kältemaschine verrichtet, wenn in ihrer Umgebung mit der Temperatur $t_1 = 20$ °C eine Wassermenge $m = 1$ kg von t_1 bis auf die Temperatur $t_2 = 0$ °C herunter abgekühlt und gefroren wird.

Lösung

Der Wirkungsgrad der CARNOT-Maschine ist

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

wobei W' die beim Kreisprozeß verrichtete Arbeit, Q_1 die vom Arbeitsstoff aufgenommene Wärme und T_1 und T_0 die Temperaturen des oberen bzw. unteren Wärmespeichers darstellen. Wenn die CARNOT-Maschine als Kältemaschine arbeitet, so nimmt sie vom unteren Wärmespeicher die Wärme Q_2 und von außen die Arbeit W auf, und an den oberen Wärmespeicher überträgt sie die Wärme Q_2 sowie diejenige Wärme, die aus der zugeführten Arbeit resultiert, also insgesamt $Q_2' = Q_2 + W$. Für den Wirkungsgrad können wir deshalb die Beziehung schreiben

$$\eta = \frac{W}{Q_2 + W},$$

woraus sich ergibt

$$W = Q_2 \frac{\eta}{1-\eta} = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0}.$$

In unserem Fall nimmt bei der Abkühlung die Temperatur des Kühlmittels (Wasser) der Kältemaschine ständig ab, während sich die Temperatur der Umgebung (Wärmespeicher) nicht ändert. Für die Entnahme der Wärmemenge dQ aus der Kältemaschine ist bei der Temperatur T die Arbeit

$$dW_1 = dQ \frac{T_1 - T}{T}$$

notwendig. Durch die Wärmeentnahme dQ sinkt die Temperatur des gekühlten Wassers von T auf $T - dT$, wobei das Wasser die Wärmemenge $dQ = -mc\, dT$ freisetzt. Für die Abkühlung des Wassers von T_1 auf T_0 ist die Arbeit

$$W_1 = \int \frac{T_1 - T}{T} dQ = -\int_{T_1}^{T_0} \frac{T_1 - T}{T} mc\, dT$$

notwendig, d. h.,

$$W_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{T_1}{T} mc\, dT - \int_{T_0}^{T_1} mc\, dT = mcT_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - mc(T_1 - T_0).$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$W_1 = 1\ \text{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 293\ \text{K} \cdot 2{,}3\ \lg \frac{293}{273} -$$
$$- 1\ \text{kg} \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1}\ (293 - 273)\ \text{K};$$
$$W_1 = 696\ \text{cal}.$$

Beim Übergang des Wassers vom flüssigen zum festen Aggregatzustand wird – bei konstanter Temperatur von 0 °C – die Wärme

$$Q_2 = ms$$

frei, wobei s die Schmelzwärme des Eises bedeutet. Für die Überführung dieser Wärme in den oberen Wärmebehälter (Wärmespeicher) bei konstanter Temperatur T_0 ist die Arbeit

$$W_2 = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0} = ms \frac{T_1 - T_0}{T_0} = 1\ \text{kg} \cdot 79{,}7 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1} \frac{20}{273} = 5839\ \text{cal}$$

erforderlich. Die von der Kältemaschine verrichtete Gesamtarbeit ist

$$W = W_1 + W_2 = \underline{27370\ \text{J}}.$$

168. Eine Wärmekraftmaschine, deren Arbeitsmedium ein Mol idealen Gases ist, wird im Zyklus von drei aufeinanderfolgenden Prozessen betrieben, und zwar:
1. isobare Erwärmung vom Ausgangsvolumen V_1 und der Ausgangstemperatur T_1 auf die Temperatur T_2;

2. adiabatische Expansion so lange, bis die Temperatur auf den Ausgangswert T_1 abgesunken ist;
3. isotherme Kompression bis auf das Ausgangsvolumen V_1.

Wie groß ist der Wirkungsgrad einer solchen Maschine?

Lösung

Der Wirkungsgrad der Maschine wird aus der Beziehung

$$\eta = \frac{W'}{Q}$$

ermittelt, in der W' die von der Maschine verrichtete Gesamtarbeit und Q die Wärme darstellt, die von der Maschine aus dem Wärmespeicher entnommen wurde.

1. Bei der isobaren Expansion vergrößert das Gas sein Volumen von V_1 auf $V_2 = V_1 T_2/T_1$ und verrichtet dabei die Arbeit

$$W_{\mathrm{I}}' = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V.$$

Aus der Zustandsgleichung erhalten wir

$$p \, \mathrm{d}V + V \mathrm{d}p = R \, \mathrm{d}T;$$

da bei konstantem Druck $\mathrm{d}p = 0$ ist, wird $p \, \mathrm{d}V = R \, \mathrm{d}T$. Daher finden wir auch

$$W_{\mathrm{I}}' = \int_{T_1}^{T_2} R \, \mathrm{d}T = R(T_2 - T_1).$$

Die innere Energie des Gases ändert sich bei diesem Prozeß um

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \int \mathrm{d}U = \int_{T_1}^{T_2} C_v \, \mathrm{d}T = C_v \, (T_2 - T_1).$$

Die dabei vom Gas aufgenommene Wärme bestimmen wir aus dem I. Hauptsatz der Thermodynamik:

$$Q_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{I}}' + \Delta U = R(T_2 - T_1) + C_v(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_1).$$

2. Im Prozeß der adiabatischen Expansion vergrößert sich das Volumen des Gases von V_2 auf V_3, und seine Temperatur sinkt von T_2 auf $T_3 = T_1$. Aus der bekannten Abhängigkeit von Volumen und Temperatur $TV^{\varkappa-1} = \mathrm{const}$ bestimmen wir das Volumen V_3 nach Durchlaufen des Expansionsprozesses:

$$T_3 V_3^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1} = T_2 \left(V_1 \frac{T_2}{T_1} \right)^{\varkappa-1},$$

woraus folgt

$$V_3 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{1}$$

Die Arbeit, die das Gas bei dieser adiabatischen Expansion verrichtet, ist gleich der Abnahme seiner inneren Energie, also

$$W'_{\mathrm{II}} = \int_{V_2}^{V_3} p \, \mathrm{d}V = -\int \mathrm{d}U = -\int_{T_2}^{T_3 = T_1} C_v \, \mathrm{d}T = C_v(T_2 - T_1).$$

Während dieses Prozesses hat das Gas Wärme weder aufgenommen noch abgegeben, so daß wir finden

$$Q_{\mathrm{II}} = 0.$$

3. Im Prozeß der isothermen Kompression erreicht das Gas wieder seinen Ausgangszustand, in dem es durch das Volumen V_1, die Temperatur T_1 und den Druck $p_1 = RT_1/V_1$ gekennzeichnet war. Die vom Gas verrichtete Arbeit ist

$$W'_{\mathrm{III}} = \int_{V_3}^{V_1} p \, \mathrm{d}V = \int_{V_3}^{V_1} RT_1 \frac{\mathrm{d}V}{V} = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3}.$$

Aus Gl. (1) aber können wir entnehmen, daß

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

ist, woraus folgt

$$W'_{\mathrm{III}} = -RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

Bei diesem Prozeß wird die positive Wärme $Q'_{\mathrm{III}} = W_{\mathrm{III}} = -W'_{\mathrm{III}}$ frei:

$$Q'_{\mathrm{III}} = RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

Bei den angeführten Zustandsänderungen verrichtet das Gas insgesamt die Arbeit

$$W' = W'_{\mathrm{I}} + W'_{\mathrm{II}} + W'_{\mathrm{III}} = R(T_2 - T_1) + C_v(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

und nimmt die Wärme

$$Q = Q_{\mathrm{I}} = C_p(T_2 - T_1)$$

auf. Der Wirkungsgrad der ganzen Maschine ist

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{(R + C_v)(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}}{C_p(T_2 - T_1)}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = \frac{C_p}{R}$$

ist, finden wir schließlich den Gesamtwirkungsgrad der Maschine

$$\underline{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}.}$$

169. Berechnen Sie die Entropieänderung, die bei der Mischung von $m_1 = 10$ g Wasser der Temperatur $t_1 = 100$ °C und $m_2 = 20$ g Wasser der Temperatur $t_2 = 15$ °C auftritt.

Lösung

Die Temperatur des Gemisches wird ermittelt aus

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 43{,}3\ °\text{C}, \quad \text{d. h.,} \quad T = 316{,}3\ \text{K}.$$

Ein aus zwei Flüssigkeiten bestehendes System hat eine Entropie, die, auf den Grundzustand von z. B. 0 °C bezogen, gleich der Summe der Entropien beider Flüssigkeiten bezüglich eben dieses Grundzustands ist. Vor Beginn des Mischungsvorgangs hatte das System die Gesamtentropie

$$S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dQ}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{m_1 c\, dT}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{m_2 c\, dT}{T} =$$

$$= m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} + m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0}.$$

Nach vollzogener Mischung wird die Gesamtentropie des Systems durch die Beziehung

$$S_2 = \int_{T_0}^{T} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc\, dT}{T} = mc \ln \frac{T}{T_0}$$

ausgedrückt, in der $m = m_1 + m_2$ ist. Für die Gesamtzunahme der Entropie finden wir damit

$$\Delta S = S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T}{T_0} - m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} - m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0} =$$

$$= m_1 c \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T}{T_2}.$$

Mit den vorgegebenen Werten finden wir schließlich

$$\Delta S = 10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{316{,}3}{373} +$$

$$+ 20 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 1 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{316{,}3}{288} =$$

$$= \underline{0{,}23\ \text{cal K}^{-1} = 0{,}96\ \text{J K}^{-1}}.$$

170. Berechnen Sie, wie sich die Entropie von $m = 2$ g Stickstoff verändert, der von einer Ausgangstemperatur $t_0 = 0$ °C auf die Temperatur $t_1 = 30$ °C erwärmt wird, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen:

a) isochore Erwärmung,

b) isobare Erwärmung.

Lösung

Für die infinitesimale Änderung der Entropie eines idealen Gases gilt

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{nC_v\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V}{T}.$$

Für die gesamte Entropieänderung, vom Ausgangszustand, in dem $S = S_0$ angesetzt wird, bis zum neuen Endzustand, erhalten wir

$$S - S_0 = \int \frac{nC_v\,\mathrm{d}T}{T} + \int \frac{p\,\mathrm{d}V}{T},$$

wobei $n = m/M$ ist.
Wenn wir eine beliebige Gasmenge m annehmen, dann gilt für die beiden vorgegebenen Erwärmungsprozesse:

a) Bei der isochoren Zustandsänderung ist $\mathrm{d}V = 0$, so daß sich ergibt

$$S - S_0 = \frac{m}{M} C_v \int_{T_0}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{T_1}{T_0} = mc_v \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Mit den gegebenen Werten finden wir

$$S - S_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}177 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}} \cdot 2{,}3 \lg \frac{303}{273} =$$
$$= \underline{0{,}0368\,\mathrm{cal\,K^{-1}} = 0{,}154\,\mathrm{J\,K^{-1}}}.$$

b) Bei der isobaren Zustandsänderung resultiert aus der Zustandsgleichung

$$pV = \frac{m}{M} RT: \quad p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = \frac{m}{M} R\,\mathrm{d}T.$$

Da bei der isobaren Zustandsänderung $\mathrm{d}p = 0$ ist, finden wir $p\,\mathrm{d}V = \frac{m}{M} R\,\mathrm{d}T$. Für die Änderung der Entropie erhalten wir

$$S' - S_0 = \frac{m}{M} C_v \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{m}{M} R \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{M} R \ln \frac{T}{T_0} =$$
$$= \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T}{T_0} = mc_p \ln \frac{T}{T_0},$$

also ist

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} = 0{,}177 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}} + \frac{1{,}98\,\mathrm{cal\,mol^{-1}\,K^{-1}}}{28 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}} =$$
$$= 0{,}249 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}}$$

und

$$S' - S_0 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}249 \cdot 10^3\,\mathrm{cal\,kg^{-1}\,K^{-1}} \cdot 2{,}3 \lg \frac{303}{273} =$$
$$= \underline{0{,}0518\,\mathrm{cal\,K^{-1}} = 0{,}217\,\mathrm{J\,K^{-1}}}.$$

171. Führen Sie den Beweis dafür, daß die Gesamtänderung der Entropie eines idealen Gases im CARNOT-Prozeß gleich Null ist.

Lösung

Wir setzen voraus, daß das Gas im Anfangszustand durch die Entropie S_0 und nach Durchlaufen des Zyklus durch die Entropie S ausgezeichnet ist. In jedem Zyklus ist die Gesamtänderung der Entropie $S - S_0$ gleich der Summe der Entropieänderungen während der einzelnen Teilprozesse im Zyklus:

$$S - S_0 = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S - S_3. \quad (1)$$

Bei der isothermen Expansion ist

$$S_1 - S_0 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int \frac{p\,\mathrm{d}V}{T} = \frac{m}{M} R \int \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei der adiabatischen Expansion ist

$$S_2 - S_1 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0, \quad \text{da ja} \quad \mathrm{d}Q = 0 \quad \text{ist.}$$

Bei der isothermen Kompression ist

$$S_3 - S_2 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_3}{V_4},$$

und da $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$ ist, wird

$$S_3 - S_2 = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei der adiabatischen Kompression ist wieder $\mathrm{d}Q = 0$, so daß wir ebenfalls finden

$$S - S_3 = 0.$$

Nach Einsetzen aller gefundenen Werte in Gl. (1) erhalten wir schließlich

$$S - S_0 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} = 0.$$

Hieraus ergibt sich der geforderte Beweis:

$$\underline{S = S_0.}$$

172. In einer Stahlflasche mit dem Volumen $V_1 = 50\,\mathrm{l}$ ist Gas unter einem Druck $p_1 = 45$ atm enthalten, in einer anderen mit dem Volumen $V_2 = 30\,\mathrm{l}$ ist ein anderes Gas unter einem Druck $p_2 = 85$ atm aufbewahrt. Die Temperaturen in beiden Gasmengen sind einander gleich, sie betragen $t = 20$ °C. Berechnen Sie, wie sich die Entropie des aus beiden Gasmengen bestehenden Systems verändert, wenn die beiden Behälter miteinander verbunden werden. Jedes Gas sei gegenüber dem anderen als chemisch inaktiv angesehen.

Lösung

Für die Änderung der Entropie eines idealen Gases bestimmter Masse gilt beim Übergang von einem irgendwie vorgegebenen Anfangs- zu einem bestimmten Endzustand die Beziehung

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{M} C_v \, dT + p \, dV}{T} = mc_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} =$$

$$= mc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} . \tag{1}$$

Vor dem Mischungsvorgang ist die Entropie der beiden betrachteten Gase

$$S_1 = S_1' + S_2',$$

wobei S_1' und S_2' die Entropien der einzelnen Gase darstellen. Wenn das System nach dem Mischvorgang durch die Entropie S_2 gekennzeichnet sein soll, so gilt für die Gesamtänderung der Entropie

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_2 - S_1' - S_2'.$$

Alle Entropieangaben beziehen wir auf den gleichen Grundzustand mit den Größen p_0, V_0 und T_0.
Unter Hinzuziehung der Gl. (1) können wir schreiben

$$S_2 - S_1 = mc_v \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{M} R \ln \frac{V}{V_0} - m_1 c_{v1} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_1}{M_1} R \ln \frac{V_1}{V_0} -$$

$$- m_2 c_{v2} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_2}{M_2} R \ln \frac{V_2}{V_0} . \tag{2}$$

Bekanntlich ist die spezifische Wärmekapazität des Gasgemischs gleich der Summe der spezifischen Wärmekapazitäten seiner Komponenten, also gilt

$$mc_v = m_1 c_{v1} + m_2 c_{v2} .$$

Weiterhin ist die Gesamtzahl der Mole des Gemischs gegeben durch

$$\frac{m}{M} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} .$$

Damit finden wir die Änderung der Entropie durch Umformung der Gl. (2) zu

$$\Delta S_2 - S_1 = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) R \ln V - \frac{m_1 R}{M_1} \ln V_1 - \frac{m_2 R}{M_2} \ln V_2 .$$

Entsprechend der Zustandsgleichung muß gelten

$$\frac{m_1 R}{M_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{und} \quad \frac{m_2 R}{M_2} = \frac{p_2 V_2}{T_2} ,$$

so daß wir nach Einsetzen erhalten

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\,[(p_1V_1 + p_2V_2)\ln V - p_1V_1 \ln V_1 - p_2V_2 \ln V_2].$$

Nach Umformung dieser Beziehung erhalten wir schließlich

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{p_1V_1}{T}\ln\frac{V}{V_1} + \frac{p_2V_2}{T}\ln\frac{V}{V_2}.$$

Mit Einsetzen der vorgegebenen Werte finden wir die gesuchte Entropieänderung

$$\Delta S = \frac{45\,\text{atm}\cdot 50\,\text{l}}{293\,\text{K}}\cdot 2{,}3\lg\frac{50+30}{50} + \frac{85\,\text{atm}\cdot 30\,\text{l}}{293\,\text{K}}\cdot 2{,}3\lg\frac{50+30}{30},$$

$$\Delta S = 12{,}1\,\text{l atm K}^{-1} = \underline{1225{,}7\,\text{J K}^{-1} \doteq 293\,\text{cal K}^{-1}}.$$

173. Berechnen Sie, wie sich die Entropie eines idealen Gases mit den Zustandsgrößen $t_0 = 20\,°\text{C}, p_0 = 1$ atm und $V_0 = 2$ l ändert, wenn es – ohne Arbeit gegen einen Kolben verrichten zu müssen – auf das doppelte Volumen ausgedehnt wird.

Lösung

Bei Ausdehnung eines idealen Gases gegen ein Vakuum verändert sich weder seine innere Energie noch seine Temperatur, wie das auch der bekannte Versuch von GAY-LUSSAC beweist.

Wenn das Gas im Ausgangszustand die Entropie S_0 und im Endzustand die Entropie S hat, so ändert sich seine Entropie während der Zustandsänderung um den Betrag $\Delta S = S - S_0$; für diese Änderung gilt die Beziehung

$$\Delta S = \int\frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int\frac{m}{M}\,C_v\frac{\mathrm{d}T}{T} + \int\frac{p\,\mathrm{d}V}{T}.$$

Da bei diesem Prozeß die Temperatur konstant bleibt, ist

$$\Delta S = \int\frac{p\,\mathrm{d}V}{T}.$$

Wir drücken die Größe p mit Hilfe der Zustandsgleichung aus und erhalten

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\int_{V_0}^{V}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{p_0V_0}{T_0}\ln\frac{V}{V_0}.$$

Nach Einsetzen der vorgegebenen Werte erhalten wir

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{1\,\text{atm}\cdot 2\,\text{l}}{293\,\text{K}}\,2{,}3\lg\frac{2\,V_0}{V_0} = 0{,}0047\,\text{l atm K}^{-1}.$$

Da 1 l atm = 101,3 J und 1 J = $2{,}39\cdot 10^{-1}$ cal ist, finden wir

$$\underline{S - S_0 = 0{,}477\,\text{J K}^{-1} = 0{,}114\,\text{cal K}^{-1}}.$$

174. Eine Menge idealen Gases vom Volumen $V_1 = 10\,\mathrm{l}$ und dem Druck $p_1 = 2\,\mathrm{atm}$ lassen wir bei konstanter Temperatur auf ein Volumen $V_2 = 27{,}18\,\mathrm{l}$ reversibel expandieren. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die freie Energie des Gases verändert.

Lösung

Aus seiner Definition ergibt sich für eine infinitesimale Änderung der freien Energie eines Gases

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}U - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T.$$

Bei den reversiblen Prozessen ist $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q}{T}$.

Bei einem isothermen Prozeß ist $\mathrm{d}U = 0$ und $\mathrm{d}T = 0$, sowie $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W'$, so daß wir nach Einsetzen finden

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}Q = -\mathrm{d}W'.$$

Die Gesamtänderung der freien Energie erhalten wir durch Integration

$$\int_1^2 \mathrm{d}F = -\int_1^2 \mathrm{d}W' = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

Es ist also

$$F_2 - F_1 = -\frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Mit den gegebenen Werten der Aufgabe finden wir also

$$F_2 - F_1 = 2\,\mathrm{atm} \cdot 10\,\mathrm{l} \cdot 2{,}3\,\lg \frac{10}{27{,}18} = -20\,\mathrm{l\,atm} = \underline{-202{,}7\,\mathrm{J}}.$$

175. Eine Menge Stickstoffgas der Masse $m = 2\,\mathrm{g}$ und der Temperatur $t_0 = 27\,°\mathrm{C}$ wird bei konstantem Druck auf ein Volumen komprimiert, das nur $^3/_4$ des ursprünglichen Wertes beträgt. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die potentielle thermodynamische Energie des Gases verändert.

Lösung

Aus der Definition der potentiellen thermodynamischen Energie ergibt sich für ihre infinitesimale Änderung

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T.$$

Bei umkehrbaren Prozessen ist $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$. Wenn wir weiter berücksichtigen, daß entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik $\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}Q$ ist, können wir schreiben

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T.$$

Da für die vorgegebene isobare Zustandsänderung $dp = 0$ ist, wird

$$dG = -S\,dT. \tag{1}$$

Die Entropie des zur Temperatur T gehörenden Zustands finden wir zu

$$S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{M} C_v\,dT + p\,dV}{T}.$$

Für die isobare Zustandsänderung ist $p\,dV = (m/M)R\,dT$, und wenn wir noch die MAYERsche Beziehung $C_p = C_v + R$ anwenden, erhalten wir

$$S = \int_{T_0}^{T} \frac{m}{M} C_p \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T}{T_0} = mc_p \ln \frac{T}{T_0}. \tag{2}$$

Unter Anwendung der Gl. (2) erhalten wir aus Gl. (1) die gesamte Änderung der potentiellen thermodynamischen Energie im Verlauf der vorgegebenen Zustandsänderung zu

$$\int_1^2 dG = -\int_{T_0}^{T_1} S\,dT = -\int_{T_0}^{T_1} mc_p \ln \frac{T}{T_0}\,dT.$$

Nach den bekannten Integrationsregeln erhalten wir für das Integral

$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1)$ und, bezogen auf unser vorliegendes Beispiel, nach Umformung

$$G_2 - G_1 = mc_p(T_1 - T_0) + mc_p T_1 \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

Die nach Verlauf der isobaren Kompression sich einstellende Gastemperatur ermitteln wir aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 \frac{3}{4} V_0}{T_1}, \quad \text{so daß} \quad T_1 = \frac{3T_0}{4} = 225\ \text{K}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$G_2 - G_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}249 \cdot 10^3\ \text{cal kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} \left[-75\ \text{K} + 225\ \text{K} \cdot 2{,}3 \lg \frac{4}{3}\right] =$$
$$= -5\ \text{cal} = \underline{-21\ \text{J}}.$$

176. Ermitteln Sie mit Hilfe der Phasenregel, durch wieviel voneinander unabhängige Zustandsgrößen der Gleichgewichtszustand folgender Systeme bestimmt wird:
a) Wasser mit gesättigtem Dampf,
b) Kochsalzlösung ($H_2O + NaCl$) mit gesättigtem Dampf,
c) ein System, das sich aus den Stoffen $CaCO_3$, CaO und CO_2 zusammensetzt, zwischen denen die Reaktion

$$CaCO_3 \rightleftharpoons CaO + CO_2 \tag{1}$$

ablaufen kann.

Lösung

Wir wenden die GIBBSsche Phasenregel an:

$$f = k + 2 - p.$$

a) Das vorgegebene System hat eine Komponente (H_2O) und zwei Phasen (Flüssigkeit, Dampf). Daher ist

$$f = 1 + 2 - 2 = \underline{1}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird durch einen Parameter bestimmt, z. B. durch die Temperatur.

b) Das System hat zwei Komponenten (H_2O, NaCl) und zwei Phasen (Lösung, Dampf), daher gilt

$$f = 2 + 2 - 2 = \underline{2}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird von zwei Parametern bestimmt, und zwar durch Temperatur und Konzentration.

c) Im System existieren zwei feste Phasen (CaO, $CaCO_3$) und eine Gasphase (CO_2). Wenn die das System bildenden Stoffe miteinander keinerlei Reaktionen eingingen, dann hätte das System drei Komponenten. Da aber die Reaktion (1) stattfinden kann, verringert sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Komponenten um eine, so daß $k = 2$ ist. Demnach gilt

$$f = 2 + 2 - 3 = \underline{1}.$$

Der Gleichgewichtszustand wird also lediglich durch einen Parameter bestimmt, z. B. durch die Temperatur. Dadurch ist z. B. auch der Druck des CO_2 bestimmt.



Aufgaben

193. Eine Maschine, die eine Leistung der Größe $P = 368$ W aufnimmt, bohrt innerhalb zwei Minuten ein Loch in einen Gußblock der Masse $m = 20$ kg. Um wieviel Grad erwärmt sich dabei der Block, wenn 80% der beim Bohren verrichteten Arbeit zur Erwärmung und damit zur Erhöhung der inneren Energie des Blockes beitragen? Die spezifische Wärmekapazität des Gußstückes ist $c = 0{,}13$ cal g^{-1} K^{-1}.

194. In einem Rohr, das wir 40mal umdrehen, fallen Bleikugeln aus der Höhe $h = 1{,}2$ m herab. Bei dem Experiment stellen wir fest, daß die Temperatur der Kugeln sich um 3,8 K erhöht. Wir setzen voraus, daß die gesamte, bei der Deformation der Kugeln durch den Aufprall verrichtete Arbeit zur Erhöhung der inneren Energie der Kugeln beiträgt. Aus diesen Angaben ist das mechanische Wärmeäquivalent zu bestimmen.

195. Aus der bekannten Molmasse eines Gases und aus dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $\varkappa = c_p/c_v$ soll der Wert der spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v für das Gas Stickstoff ermittelt werden.

196. Bestimmen Sie die Molmasse der Luft, wenn ihre spezifische Wärmekapazität c_v und das Verhältnis ihrer spezifischen

Wärmekapazitäten $\varkappa = c_p/c_v$ bekannt sind.

197. Es wird eine Mischung zweier Gase hergestellt, die aus $m_1 = 2$ g Kohlendioxid und $m_2 = 3$ g Stickstoff besteht. Die spezifischen Wärmekapazitäten c_{v1} und c_{v2} sind bekannt. Berechnen Sie das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten für das resultierende Gasgemisch.
198. Ein Gasgemisch besteht aus $m_1 = 2$ g Sauerstoff und $m_2 = 5$ g Stickstoff. Es soll bei konstantem Volumen von einer Temperatur $t_1 = 20$ °C auf $t_2 = 40$ °C erwärmt werden. Berechnen Sie die dazu notwendige Wärmemenge.
199. Einer bestimmten Menge Argon wird bei konstantem Volumen und einer Ausgangstemperatur von 60 °C eine Wärmemenge von 50 cal zugeführt, wodurch sich eine Temperaturerhöhung auf 88 °C einstellt. Um welche Menge Argon handelt es sich bei diesem Versuch?
200. Berechnen Sie, auf welchen Betrag sich die Temperatur einer Menge Kohlendioxid von $m = 0{,}6$ kg Masse verringert, wenn ihr, von einer Ausgangstemperatur $t_0 = 50$ °C ausgehend, 15,7 kJ an innerer Energie entzogen werden.
201. Eine bestimmte Menge idealen Gases nimmt bei einem Druck $p_0 = 760$ Torr das Volumen $V_0 = 1$ l ein. Berechnen Sie, wie sich die innere Energie des Gases verändert, wenn es einem Prozeß unterzogen wird, bei dem der Druck auf das Vierfache wächst, während das Volumen auf die Hälfte verringert wird. Es ist a) ein einatomiges Gas mit $\varkappa = {}^5/_3$ und b) ein zweiatomiges Gas mit $\varkappa = {}^7/_5$ anzunehmen.
202. In einem Gefäß ist Luft der Masse $m = 6$ kg eingeschlossen. Ihr wird eine Wärmemenge $Q = 88$ kcal zugeführt. Dabei vergrößert die Luft ihr Volumen und verrichtet eine Arbeit $W' = 182$ kJ, wobei ihre Temperatur von $t_1 = 10$ °C auf $t_2 = 52$ °C ansteigt. Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Angaben die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v für Luft. Die POISSONsche Konstante hat den Wert $\varkappa = 1{,}4$.
203. In einem Zylinder mit beweglichem Kolben wird bei konstantem Druck $p_0 = 1520$ Torr eine Luftmenge $m = 5$ g von der Temperatur $t_0 = 18$ °C auf eine Temperatur $t_1 = 200$ °C erhitzt. Welche Wärmemenge muß der Luft zugeführt werden, und welche Arbeit verrichtet sie bei der Expansion? Berechnen Sie ferner, um welche Strecke sich der bewegliche Kolben dabei verschiebt, wenn der Durchmesser des Kreiskolbens 6 cm beträgt.
204. Eine Luftmenge der Masse $m = 0{,}5$ kg und der Ausgangstemperatur $t_0 = 35$ °C wurde isobar komprimiert, wobei ihr eine Wärmemenge von 23,4 kcal entzogen wurde. Auf welche Temperatur erhitzte sie sich dabei?
205. In einem Gefäß von 60 l Inhalt ist eine Luftmenge der Masse $m = 0{,}2$ kg unter einem Druck von 10 at eingeschlossen. Berechnen Sie, welche Wärmemenge ihr zugeführt werden muß, damit sich ihr Volumen bei konstantem Druck auf den doppelten Wert ausdehnt. Um welchen Betrag ändert sich dabei ihre innere Energie, und welche Arbeit verrichtet die Luft dabei nach außen?
206. Für die isobare Kompression einer Gasmenge der Masse $m = 100$ g ist es notwendig, eine Arbeit vom Betrag $W = 1817{,}8$ J aufzuwenden. Dabei steigt ihre Temperatur von $t_1 = 40$ °C auf $t_2 = 110$ °C. Berechnen Sie, welche Wärme bei diesem Prozeß dem Gas noch zugeführt werden muß und um welchen Betrag ihre innere Energie anwächst. Um welches Gas handelt es sich hierbei?
207. In einem senkrecht stehenden, mit be-

weglichem Kolben verschlossenen Zylinder der Höhe l_0 und der Querschnittsfläche A befindet sich Gas unter dem Druck p_0. Das Gas wird isotherm komprimiert, wobei der Kolben auf ein Zehntel seiner ursprünglichen Höhe herabgedrückt wird. Welche Arbeit muß dazu verrichtet werden?

208. Welche Wärme ist erforderlich, um 2 l Wasserstoff unter einem Druck von 0,8 kp cm^{-2} isotherm auf das Vierfache seines Volumens zu expandieren? Welchen Wert nimmt der resultierende Druck an?

209. Bei der isothermen Kompression von $V_1 = 4{,}5$ l Luft und dem ursprünglichen Druck $p_1 = 740$ Torr wird an die Umgebung eine Wärmemenge $Q' = 0{,}25$ kcal abgeführt. Berechnen Sie Druck und Volumen der Luft nach Ablauf des Kompressionsvorgangs.

210. Bei der isothermen Kompression einer bestimmten Gasmenge auf ein Volumen von 4 l und einen Druck von 21,6 N cm^{-2} wird durch Abkühlung eine Wärmemenge von 6 cal abgeführt. Berechnen Sie, welchen Wert der Gasdruck zu Beginn des Prozesses hatte, als die Gastemperatur 20 °C betrug.

211. Ein Kompressor saugt atmosphärische Luft von 760 Torr Druck und 27 °C an und komprimiert sie isotherm auf einen Druck von 26600 Torr. Berechnen Sie, wieviel Wärme stündlich an das Kühlwasser abgeführt werden muß, wenn je Stunde 10 kg Luft komprimiert werden.

212. Es soll Luft von 1 kg Masse und 0 °C Temperatur von einem Druck von 1 kp cm^{-2} ausgehend auf den zehnfachen Druck komprimiert werden. Berechnen Sie den dafür erforderlichen Arbeitsaufwand bei a) isothermer und b) adiabatischer Kompression.

213. In einem Gefäß von zwei Liter Inhalt befinden sich bei einer Temperatur von 27 °C 2 Mol Stickstoff.
Berechnen Sie, welchen Druck der Stickstoff in verschiedenen Volumina von 1,5 l, 4 l, 5 l und 6 l annimmt, wenn das Gas a) isotherm und b) adiabatisch verändert wird.
Stellen Sie die entsprechenden Druckänderungen in einem p, V-Diagramm dar.

214. Stickstoff mit einer Masse $m = 8$ g und einer Temperatur $t_0 = 20$ °C soll adiabatisch auf ein Fünftel seines ursprünglichen Volumens komprimiert werden. Welche Arbeit wird bei diesem Prozeß dem Gas zugeführt, und wie ändert sich dabei seine innere Energie? Berechnen Sie auch die Temperatur des Stickstoffs nach Beendigung des Kompressionsvorgangs.

215. Eine bestimmte Menge Luft mit der Temperatur $t_1 = 25$ °C und dem Druck $p_1 = 760$ Torr wird plötzlich von einem Volumen $V_1 = 15$ l auf ein Volumen $V_2 = 3{,}4$ l komprimiert. Welche Werte nehmen Temperatur und Druck am Ende des Kompressionsaktes an, und wie verändert sich die innere Energie der betreffenden Luftmenge, wenn wir den Kompressionsakt als adiabatischen Prozeß ansehen? Die POISSONsche Konstante für Luft ist $\varkappa = 1{,}4$.

216. Zwei Grammoleküle Wasserstoff mit der Temperatur $t_1 = 27$ °C und dem Druck $p_1 = 745$ Torr werden adiabatisch auf ein Drittel des ursprünglichen Volumens komprimiert. Danach wird das Gas isotherm auf sein ursprüngliches Volumen ausgedehnt. Wie hoch werden sich Endtemperatur und -druck einstellen? Welche Arbeit wird hierbei vom Gas verrichtet?

217. In einem Ballon befindet sich ein Gasgemisch, das durch gleiche Mengen Helium und Wasserstoff bei einer Temperatur von 0 °C und einem Druck von 760 Torr gebildet wird. Berechnen Sie, wie sich Druck und Temperatur des angegebenen Gemischs ändern, wenn es

adiabatisch auf das doppelte Volumen ausgedehnt wird.

218. Eine Stickstoffmenge mit der Masse $m = 200$ g, der Ausgangstemperatur $t_1 = 27$ °C und dem Druck $p_1 =$ $= 3040$ Torr wird einem thermodynamischen Prozeß unterzogen, bei dem der Druck auf den Wert $p_2 = 2280$ Torr absinkt. Welche Wärmemenge wurde dem Stickstoff zugeführt, welche Arbeit verrichtete dieser dabei, und wie veränderte sich seine innere Energie, wenn der Prozeß a) isochor, b) isotherm und c) adiabatisch verlief? Stellen Sie diese Prozesse in p, V-Diagrammen dar.

219. Es ist der theoretisch höchste Wirkungsgrad einer Dampfmaschine zu bestimmen, die mit Dampf einer Temperatur von 190 °C betrieben wird und bei der das Kondenswasser eine Temperatur von 40 °C hat.

220. Berechnen Sie, welche Werte die Temperaturen des oberen und des unteren Wärmespeichers einer idealen CARNOT-Maschine haben müssen, zwischen denen eine Temperaturdifferenz von 40 K besteht. Die Maschine arbeitet mit einem Wirkungsgrad von 12%.

221. Eine CARNOT-Maschine entnimmt bei jedem Zyklus einem oberen Wärmespeicher eine Wärmemenge von 100 cal, um einem unteren Wärmespeicher 80 cal zuzuführen. Berechnen Sie die Temperatur des unteren Wärmespeichers, wenn die des oberen bei 127 °C gehalten wird.

222. Wie groß muß die Mindestleistung einer Maschine sein, die einer großen Wassermenge der konstanten Temperatur von 17 °C in jeder Sekunde 10 kcal Wärme entnimmt, um diese einem Heizkörper von 46 °C zuzuführen? Welche Wärmemenge wird insgesamt an den oberen Wärmespeicher abgegeben?

223. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von 20 g Wasser, wenn wir es von 10 °C auf 75 °C erhitzen?

224. Berechnen Sie die Entropie eines Gramms Wasser bei einer Temperatur von 100 °C und die eines Gramms gesättigten Wasserdampfes der gleichen Temperatur, bezogen auf den flüssigen Aggregatzustand bei 0 °C.

225. In ein drei Liter fassendes Wasserbad von 15 °C wird eine Masse von 1 kg Blei gebracht, das vorher auf eine Temperatur von 300 °C erhitzt wurde. Wie ändert sich die Entropie des Systems nach Einstellung der Endtemperatur?
Die Wärmekapazität des Gefäßes sowie mögliche weitere Wärmeverluste werden vernachlässigt.

226. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von 20 g Eis, das zuerst bei einer Temperatur von 0 °C vorlag und dann bei normalem Atmosphärendruck in Dampf von 100 °C verwandelt wird?

227. Berechnen Sie die Entropieänderung von 2 g Stickstoff, der bei konstanter Temperatur, d. h. isotherm, einer Volumenverringerung von 6 auf 4 l unterworfen wurde.

228. Um welchen Betrag ändert sich die Entropie von einem Gramm Kohlendioxid, das aus einem Anfangszustand mit den Zustandsgrößen $p_1 = 4560$ Torr und $t_1 = 20$ °C in einen anderen Zustand mit den Zustandsgrößen $p_2 =$ $= 1520$ Torr und $t_2 = -20$ °C übergeführt wurde?

229. Zwei Mol Gas werden bei einer Temperatur von 127 °C so komprimiert, daß der Gasdruck auf den doppelten Wert ansteigt. Berechnen Sie, wie sich bei diesem Prozeß die freie Energie und die potentielle thermodynamische Energie des Gases verändern.

230. Berechnen Sie, durch wieviel voneinander unabhängige Zustandsgrößen ein chemisch reiner Stoff bei Änderung seines Aggregatzustands definiert wird.

231. Beweisen Sie, daß ein System, in dem drei Phasen derselben Komponente

nebeneinander bestehen, nur bei ganz bestimmten Druck- und Temperaturwerten im Gleichgewicht existieren kann.

2.4. Ein- und mehrphasige Systeme

Bei Änderung seines Aggregatzustands nimmt ein Stoff Energie gewöhnlich nur in Form von Wärme auf (oder gibt sie in dieser Form ab). Kurzgefaßt kann man sagen: Bei der Änderung des Aggregatzustands wird Wärme umgesetzt. Als **Umwandlungswärme** l bezeichnen wir diejenige Wärmemenge, die bei der Änderung des Aggregatzustands einer Masseeinheit eines bestimmten Stoffes umgesetzt (d. h. zugeführt oder freigesetzt) wird. Gemäß dem I. Hauptsatz der Thermodynamik gilt

$$Q = l = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1).$$

Ein Teil der zugeführten Wärme wird bei der Änderung des Aggregatzustands zur Vergrößerung der inneren Energie $U_2 - U_1$ und ein anderer wird für die Arbeit notwendig, die bei der Änderung des Volumens von V_1 auf V_2 verrichtet wird, wenn sie bei konstantem Druck verläuft.

Chemisch reine Stoffe sind bei gegebenem Druck durch eine ganz bestimmte Schmelztemperatur und durch eine ganz bestimmte Siedetemperatur ausgezeichnet. Diese Temperatur ist druckabhängig. Die CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Gleichung drückt die Druckabhängigkeit der Temperatur der Aggregatzustandsänderung von Stoffen in Form einer Differentialgleichung aus. Sie besagt:

Wenn ein Stoff bei der Temperatur T aus einem Aggregatzustand (1) in einen anderen Aggregatzustand (2) übergeht und wenn für die Aggregatzustandsänderung die Umwandlungswärme l benötigt wird, dann verursacht eine infinitesimale Änderung des Drucks um $\mathrm{d}p$ eine Änderung der Temperatur, bei welcher der Stoff seinen Aggregatzustand wechselt, um den Betrag $\mathrm{d}T$ entsprechend der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{l}{T(v_2 - v_1)}$$

(v_1 bzw. v_2 spezifisches Volumen des entsprechenden Aggregatzustands des Stoffes). Bei einem ganz bestimmten Druck und einer ganz bestimmten Temperatur, dem sog. *Tripelpunkt*, können alle drei Aggregatzustände eines Stoffes im Gleichgewicht nebeneinander bestehen.

Als **Sattdampf** bezeichnen wir einen Dampf, der sich mit seiner Flüssigkeit im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Seine Spannung ist – solange der Dampf gesättigt bleibt – unabhängig vom Volumen, das er einnimmt. Mit wachsender Temperatur steigt die Spannung des gesättigten Dampfes so lange an, bis sie bei einer

bestimmten, der sog. **kritischen Temperatur** T_k einen maximalen Wert erreicht. Oberhalb der kritischen Temperatur kann die flüssige Phase nicht mehr existieren. Den zur kritischen Temperatur gehörenden Druck des gesättigten Dampfes bezeichnen wir als **kritischen Druck** p_k und das zugehörige Volumen als **kritisches Volumen** V_k. Die Isotherme eines realen Gases, welche die Abhängigkeit seines Drucks vom Volumen im Bereich der kritischen Temperatur darstellt, hat im sog. kritischen Punkt einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

Die Eigenschaften und das Verhalten der realen Gase werden relativ gut durch die VAN-DER-WAALSsche Zustandsgleichung beschrieben. Sie hat für ein Mol Gas die Form

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

(a und b stoffabhängige Konstanten, V_m Molvolumen, p Druck und R Gaskonstante). Das Glied a/V_m^2 nennt man *Innendruck* oder Kohäsionsdruck des Gases. Mit seiner Hilfe charakterisieren wir die wechselseitige Anziehung der Gasmoleküle.

Der Zusammenhang zwischen den VAN-DER-WAALSschen Konstanten a und b sowie den Parametern des kritischen Zustands p_k, V_k, T_k wird durch folgende Beziehungen angegeben:

$$V_k = 3b; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}.$$

Ein homogenes Gemisch zweier chemisch reiner Stoffe bezeichnen wir als **Lösung.** Die Konzentration von Lösungen wird gewöhnlich durch folgende Definitionen angegeben:

α) durch die Zahl der Mole des gelösten Stoffes in 1 l Lösung (sog. **Molarität** der Lösung),

β) durch die Zahl der Mole des gelösten Stoffes, die auf 1 kg reinen Lösungsmittels entfallen (sog. **Kilogramm-Molarität** oder **Molalität** der Lösung),

γ) mit Hilfe der Massenprozentzahlen (sog. Grammbrüche) und

δ) mit Hilfe der Molbrüche gemäß folgender Definition:

Ein Molbruch der Komponente A in einer Lösung mit den beiden Komponenten A und B wird durch die Beziehung

$$\nu_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

bestimmt, wobei n_A bzw. n_B die Zahl der Mole der Komponente A bzw. B in der Lösung darstellt.

Ein homogenes Gemisch zweier Flüssigkeiten wird dann als **ideal** bezeichnet, wenn die Partialdrücke der Komponenten p_1 bzw. p_2 im Sattdampf proportional zu ihren Molbrüchen ν_1 bzw. ν_2 in der Flüssigkeit sind.

Wenn wir die Lösung eines nichtflüchtigen Stoffes betrachten, so sehen wir, daß sein Sattdampf nur aus dem Dampf des Lösungsmittels besteht. Wenn n_0 die Zahl der Mole des Lösungsmittels, n die Zahl der Mole des gelösten Stoffes, p_0 die Spannung der Sattdämpfe des reinen Lösungsmittels und p die Spannung der Sattdämpfe des Lösungsmittels über der Lösung darstellt, dann gilt für eine relative Erhöhung der Spannung der Sattdämpfe über der idealen Lösung eines nichtflüchtigen Stoffes das RAOULTsche Gesetz

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}.$$

Nach VAN'T HOFF stellt der **osmotische Druck** π, durch den verdünnte, elektrisch nicht leitfähige Flüssigkeiten wirken, den in einem solchen Fall auftretenden Druck so dar, als ob der gelöste Stoff das ganze Volumen einnimmt, das von der Lösung ausgefüllt wird, und zwar so, als wenn er im gasförmigen Aggregatzustand vorläge. Demnach ist

$$\pi = \frac{m}{MV} RT = cRT.$$

(m Masse des gelösten Stoffes, M seine Molmasse, V Volumen der Lösung, T Temperatur der Lösung).

Der Quotient $m/MV = n/V = c$ stellt die Zahl der Mole des gelösten Stoffes je Volumeneinheit der Lösung dar.

Lösungen erstarren bei geringerer und sieden bei höherer Temperatur als das reine Lösungsmittel. Die Schmelzpunkterniedrigung bzw. Siedepunkterhöhung von elektrisch nicht leitenden Lösungen wird durch die Gleichungen

$$\Delta t_s = -E_g \frac{m}{MV}; \quad \Delta t_v = E_s \frac{m}{MV}$$

bestimmt (Δt_s bzw. Δt_v die Differenz zwischen der Schmelz- bzw. der Siedetemperatur des reinen Lösungsmittels und der Lösung, m Masse des gelösten Stoffes, M Molmasse, V Volumen der Lösung). Die Konstanten E_g, die **kryoskopische Konstante,** und E_s, die **ebullioskopische Konstante** (auch molale Gefrierpunkterniedrigung bzw. molale Siedepunkterhöhung genannt), können wir aus den Beziehungen

$$E_g = \frac{RT_s^2}{\varrho_0 l_s}; \quad E_s = \frac{RT_v^2}{\varrho_0 l_v}$$

berechnen (R Gaskonstante, T_s und T_v Schmelz- bzw. Siedetemperatur des reinen Lösungsmittels, l_s und l_v Schmelzwärme bzw. Verdampfungswärme des reinen Lösungsmittels, ϱ_0 Dichte des reinen Lösungsmittels).

B Beispiele

177. Unter dem Druck $p_1 = 760$ Torr schmilzt Blei bei der Temperatur $t_1 = 327$ °C. Berechnen Sie, wie groß die Schmelzwärme des Bleis bei dieser Temperatur ist, wenn sich bei einer Erhöhung des äußeren Drucks um $\Delta p = 760$ Torr die Schmelztemperatur um $\Delta t = 0{,}008$ K erhöht und das Blei durch den Schmelzprozeß sein Volumen um 3,4% vergrößert.

Lösung

Die Schmelzwärme erhalten wir aus der Clausius-Clapeyronschen Gleichung

$$l = T(v_2 - v_1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}. \tag{1}$$

Das spezifische Volumen der festen Phase ist $v_1 = 1/\varrho$, wobei ϱ die Dichte des Bleis darstellt. Das spezifische Volumen der flüssigen Phase bestimmen wir aus der Bedingung, daß ihr Volumen um k% größer ist als das der festen Phase, also

$$v_2 = v_1 + v = v_1 + \frac{v_1}{100}k.$$

Der Quotient $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T$ kann durch den Quotienten $\Delta p/\Delta T$ in Hinblick auf die geringfügige Temperaturänderung ΔT ersetzt werden.
Nach Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$l = T_1\frac{v_1}{100}k\frac{\Delta p}{\Delta T} = 600\,\mathrm{K}\,\frac{1}{11{,}3\cdot 10^5\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}\,3{,}4\,\frac{1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}}{0{,}008\,\mathrm{K}} =$$
$$= \underline{22{,}86\cdot 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}}} = \underline{5{,}46\,\mathrm{cal\,g^{-1}}}.$$

178. Die Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur können wir beim α-Naphthol durch die Beziehung

$$T = a + bp + cp^2$$

ausdrücken ($a = 369$ K, $b = 32{,}63\cdot 10^{-6}$ K Torr^{-1}, $c = -11{,}25\cdot 10^{-13}$ K Torr^{-2}). Berechnen Sie, wie groß die Schmelzwärme dieser Substanz bei einem Druck von 100 atm ist, wenn sich das spezifische Volumen der festen Phase beim Schmelzen um $\Delta v = 0{,}107$ cm^3 g^{-1} vergrößert.

Lösung

Unter dem Druck $p = p_0$ schmilzt der Stoff bei einer Temperatur T_0, für die gilt

$$T_0 = a + bp_0 + cp_0^2.$$

Durch Ableiten der Temperatur $T(p)$ nach dem Druck erhalten wir

$$\frac{dT}{dp} = b + 2cp,$$

woraus für die Änderung des Drucks der Sattdämpfe mit der Temperatur allgemein resultiert

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{b + 2cp}$$

und für den Druck $p = p_0$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = \frac{1}{b + 2cp_0}.$$

Die Schmelzwärme wird sodann aus der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung errechnet:

$$l = T_0 (v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}.$$

Mit den Werten

$$T_0 = 371{,}5 \text{ K}; \quad v = v_2 - v_1 = 0{,}107 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}; \quad \left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = 40{,}53 \text{ atm K}^{-1}$$

folgt

$$l = 371{,}5 \text{ K} \cdot 0{,}107 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \cdot 40{,}53 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \text{ K}^{-1} =$$
$$= \underline{1{,}63 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}} = \underline{39{,}0 \text{ cal g}^{-1}}.$$

179. Welchen Druck nimmt gesättigter Wasserdampf bei $t_1 = 80$ °C an, wenn die Abhängigkeit der Verdampfungswärme des Wassers von der Temperatur durch die angenäherte Beziehung

$$l = a - bT$$

ausgedrückt wird, wobei $a = 764 \text{ cal g}^{-1}$ und $b = 0{,}6 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ist? Wenden Sie bei der Berechnung der Gasphase die Zustandsgleichung an, und vernachlässigen Sie das spezifische Volumen der Kondensationsphase gegenüber der Gasphase bei gegebener Temperatur.

Lösung

Nach der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung gilt

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{(v_2 - v_1)\, T},$$

und nach Einfügen der Bedingung $l = a - bt$ und $v_1 \ll v_2$ finden wir

$$\frac{dp}{dT} = \frac{a - bT}{v_2 T} . \tag{1}$$

Aus der Zustandsgleichung $pV = (m/M)RT$ ergibt sich für das spezifische Volumen der Gasphase die Beziehung

$$v_2 = v = \frac{V}{m} = \frac{RT}{Mp},$$

woraus sich nach Einsetzen in Gl. (1) und einer Umformung ergibt

$$\frac{dp}{p} = \frac{M}{R} \frac{a - bT}{T^2} dT.$$

Indem wir beide Seiten der vorstehenden Gleichung integrieren, finden wir

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{T_0}^{T} \frac{M}{R} \frac{a - bT}{T^2} dT,$$

d. h.,

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{M}{R}\left[a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + b \ln \frac{T}{T_0}\right],$$

so daß wir finden können

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{M}{R}\left[a\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + b \ln \frac{T}{T_0}\right]\right\}.$$

Bei einer Temperatur $t_0 = 100$ °C beträgt der Druck der gesättigten Wasserdämpfe $p_0 = 760$ Torr, so daß nach Einsetzen der gegebenen Werte geschrieben werden kann

$$p = 1 \text{ atm} \exp\left\{-\frac{18 \text{ g mol}^{-1}}{1{,}98 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}\left[764 \text{ cal g}^{-1}\left(\frac{1}{353} \text{ K}^{-1} - \frac{1}{373} \text{ K}^{-1}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 0{,}6 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{353}{373}\right]\right\}$$

$$p = 0{,}470 \text{ atm} = \underline{357{,}2 \text{ Torr}} = \underline{47\,640 \text{ Pa}}.$$

Das Resultat kommt dem experimentell ermittelten Wert von 355,1 Torr sehr nahe.

180. Berechnen Sie, welcher Arbeitsaufwand für die Umwandlung einer Wassermenge der Masse $m = 1$ g notwendig ist, wenn das Wasser bei konstant gehaltener Temperatur von 100 °C vollständig in Dampf übergeführt wird. Der Druck beträgt $p = 760$ Torr. Um welchen Betrag ändert sich bei diesem Prozeß die innere Energie des Wassers? Unter den gegebenen Bedingungen ist das spezifische Volumen des Wasserdampfes $v_2 = 1674 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}$, das des Wassers $v_1 = 1{,}04 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}$.

Lösung

Entsprechend dem I. Hauptsatz der Thermodynamik wird die zugeführte Umwandlungswärme für die Änderung der inneren Energie und für die Leistung der mit der Volumenänderung des verdampfenden Wassers einhergehenden Arbeit aufgewendet. Demnach ist

$$l = U_2 - U_1 + W'.$$

Bei der Änderung des Aggregatzustands ändert sich zwar der Druck nicht, aber das spezifische Volumen des Wassers wächst von v_1 auf v_2. Für die notwendige Volumenarbeit bei konstantem Druck erhalten wir

$$W' = \int_{v_1}^{v_2} p \, \mathrm{d}V = p(v_2 - v_1) = 1 \text{ atm} \cdot 1673 \cdot 10^{-3} \text{ l g}^{-1} =$$
$$= 1{,}673 \text{ l atm g}^{-1} = 169{,}6 \text{ J g}^{-1} = 40{,}5 \text{ cal g}^{-1}.$$

Die Änderung der inneren Energie finden wir wie folgt:

$$U_2 - U_1 = l - W' = 539 \text{ cal g}^{-1} - 40{,}5 \text{ cal g}^{-1} = 498{,}5 \text{ cal g}^{-1} = \underline{2084 \text{ J g}^{-1}}.$$

181. Bestimmen Sie die Temperatur und den Druck am Tripelpunkt des Arsens, wenn die Abhängigkeit der Sattdämpfe von der Temperatur durch folgende Beziehungen gegeben ist:

a) für die Flüssigkeitsphase

$$p_1 = k_1 \, \mathrm{e}^{\frac{a_1}{T}}, \tag{1}$$

b) für die feste Phase

$$p_2 = k_2 \, \mathrm{e}^{\frac{a_2}{T}}. \tag{2}$$

($a_1 = -5658$ K, $a_2 = -15978$ K, $k_1 = 4{,}89 \cdot 10^6$ Torr, $k_2 = 6{,}31 \cdot 10^{10}$ Torr).

Lösung

Im Tripelpunkt existieren bei einer ganz bestimmten Temperatur und bei ganz bestimmtem Druck drei Aggregatzustände eines Stoffes im Gleichgewicht nebeneinander. Die Spannung der Sattdämpfe über der flüssigen und über der festen Phase muß also bei der Temperatur des Tripelpunkts gleich sein.

Die entsprechende Temperatur bestimmen wir durch Gegenüberstellung und Lösung der beiden Gln. (1) u. (2)

$$p_1 = p_2,$$

$$k_1 \, \mathrm{e}^{\frac{a_1}{T}} = k_2 \, \mathrm{e}^{\frac{a_2}{T}},$$

$$\mathrm{e}^{\frac{a_1 - a_2}{T}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

so daß sich ergibt

$$\frac{a_1 - a_2}{T} = 2{,}3 \lg \frac{k_2}{k_1}.$$

Wir finden also

$$T = \frac{a_1 - a_2}{2{,}3 \lg \frac{k_2}{k_1}}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$T = \frac{-5658\ \text{K} + 15978\ \text{K}}{2{,}3 \lg \frac{6{,}31 \cdot 10^{10}}{4{,}89 \cdot 10^6}} = 1091\ \text{K} = \underline{818\ °\text{C}}.$$

Den zugehörigen Druck bestimmen wir aus Gl. (1) oder (2) zu

$$p = 4{,}89 \cdot 10^6\ \text{Torr} \cdot e^{-\frac{5658}{1091}} = 2{,}7 \cdot 10^4\ \text{Torr} = \underline{36\ \text{atm}} = \underline{3{,}65\ \text{MPa}}.$$

Also sind die Koordinaten des Tripelpunkts von Arsen definiert durch die Zustandswerte 36 atm und 818 °C.

182. Gesättigter Wasserdampf wird umkehrbar adiabatisch, von der Temperatur $t_1 = 195$ °C ausgehend, expandiert bis auf eine Temperatur $t_2 = 120$ °C, wobei ein gewisser Anteil des Wassers kondensiert. Berechnen Sie, welche Zusammensetzung das aus Wasser und Sattdampf bestehende Gemisch nach Vollzug der Expansion hat. Die zugehörigen Verdampfungswärmen sind $l_1 = 468{,}1\ \text{cal g}^{-1}$ und $l_2 = 525{,}7\ \text{cal g}^{-1}$.

Lösung

Bei der umkehrbaren adiabatischen Expansion verändert sich die Entropie des Systems nicht. Im Anfangszustand hat gesättigter Wasserdampf der Masse m eine – auf den Grundzustand von der Temperatur T_0 bezogene – Entropie, die wir durch folgende Beziehung definieren:

$$S_1 = S_1' + m \frac{l_1}{T_1}. \tag{1}$$

Nach der adiabatischen Expansion auf die Temperatur T_2 kondensiert eine gewisse Menge y, und die Entropie des aus Wasser und Sattdampf bestehenden Gemischs finden wir als Summe der Entropien beider Komponenten, d. h.,

$$S_2 = \frac{y}{m} S_2' + \frac{m - y}{m} S_2' + (m - y) \frac{l_2}{T_2}, \tag{2}$$

wobei S_1' und S_2' die Entropien der Wassermenge m bei den Temperaturen T_1 bzw. T_2 darstellen. Aus Gl. (2) finden wir nach vollzogener Umformung

$$S_2 = S_2' + (m - y) \frac{l_2}{T_2}.$$

Da es sich um eine umkehrbar adiabatische Zustandsänderung handelt, ändert sich hierbei die Entropie nicht, und aus der Gegenüberstellung der Gln. (1) und (2) resultiert

$$S_1' + m\frac{l_1}{T_1} = S_2' + (m - y)\frac{l_2}{T_2}. \tag{3}$$

Der Quotient $x = \frac{m - y}{m}$ bedeutet die relative Menge gesättigten Wasserdampfes nach Ablauf der adiabatischen Zustandsänderung. Für diese Größe finden wir aus Gl. (3) die Beziehung

$$x = \frac{m - y}{m} = \frac{T_2}{l_2}\left[\frac{S_1' - S_2'}{m} + \frac{l_1}{T_1}\right]. \tag{4}$$

Die Entropie S' von Wasser der Masse m bei der Temperatur T kann man – bezogen auf den Grundzustand bei T_0 – aus

$$S' = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc\,dT}{T} = mc \ln\frac{T}{T_0}$$

und

$$S_1' - S_2' = mc \ln\frac{T_1}{T_0} - mc \ln\frac{T_2}{T_0} = mc \ln\frac{T_1}{T_2}$$

bestimmen. Nach Einsetzen in Gl. (4) erhalten wir

$$x = \frac{T_2}{l_2}\left[c \ln\frac{T_1}{T_2} + \frac{l_1}{T_1}\right].$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir dann

$$x = \frac{393\ \mathrm{K}}{525{,}7\ \mathrm{cal\,g^{-1}}}\left[1\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}}\ 2{,}3\ \lg\frac{468}{393} + \frac{468{,}1\ \mathrm{cal\,g^{-1}}}{468\ \mathrm{K}}\right] = 0{,}88.$$

Das Gemisch, das sich nach der adiabatischen Expansion herausbildet, besteht aus 88 % gesättigtem Wasserdampf und 12 % Wasser.

183. Ein CARNOT-Prozeß verläuft zwischen den Temperaturen T_1 und T_2. Als Arbeitsstoff dient Wasserdampf in einer Masse $m = 1$ g, der während des gesamten Prozesses gesättigt bleibt. Stellen Sie diesen Prozeß in einem p, V-Diagramm dar, und berechnen Sie den Wirkungsgrad.

Lösung

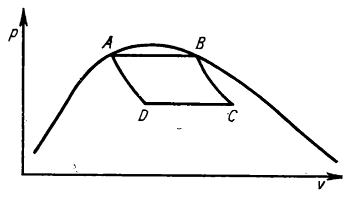


Bild 88

Aus der Bedingung, daß der Wasserdampf während des gesamten Kreisprozesses gesättigt bleiben soll, ergibt sich die Forderung, daß die Kennlinie, die den Zyklus im p, V-Diagramm beschreibt, vollständig innerhalb jenes Bereichs liegen muß, in dem Flüssigkeits- und Gasphase nebeneinander bestehen

können. Die isotherme Zustandsänderung vollzieht sich bei konstantem Druck. Daher sind die Isothermen mit den Isobaren identisch (Bild 88). Im Anfangszustand A haben wir $m = 1$ g Flüssigkeit bei einer Temperatur T_1 und der Entropie S_1'.
a) Im Verlauf der isothermen Expansion (Teilprozeß AB) verdampft das Wasser vollständig zu Sattdampf, wozu von außen die Wärmemenge

$$Q_1 = ml_1 \tag{1}$$

zugeführt werden muß. Hierbei stellt l_1 die Verdampfungswärme bei der Temperatur T_1 dar.
b) im Verlauf der adiabatischen Expansion (Teilprozeß BC) fällt die Temperatur des Dampfes auf T_2, ein Teil des Dampfes kondensiert, und das entstehende Dampf-Wasser-Gemisch enthält eine bestimmte Menge gesättigten Dampfes, die durch die Beziehung

$$x_c = \frac{T_2}{l_2}\left[\frac{S_1' - S_2'}{m} + \frac{l_1}{T_1}\right] \text{ (vgl. Aufg. 182)} \tag{2}$$

bestimmt ist (S_2' Entropie von 1 g Wasser bei der Temperatur T_2, l_2 Verdampfungswärme bei der Temperatur T_2).
c) Im Verlauf der isothermen Kompression (Teilprozeß CD) kondensiert ein weiterer Teil des Dampfes, der Anteil des Sattdampfes verringert sich auf x_D, und die Menge des kondensierten Dampfes ist

$$x_C - x_D.$$

Bei diesem Prozeß wird die Wärmemenge

$$Q_2' = (x_C - x_D)\, l_2 \tag{3}$$

frei.
d) Im Zuge der adiabatischen Kompression (Teilprozeß DA) wird das Gemisch wieder in den ursprünglichen Zustand gebracht, wobei es zur vollständigen Kondensation kommt. Bei diesem Teilprozeß ändert sich die Entropie nicht, daher ist die Entropie des Systems im Zustand (D) S_2 dieselbe wie im Zustand (A) S_1'. Nun ist

$$S_2 = (m - x_D)\frac{S_2'}{m} + x_D\left[\frac{S_2'}{m} + \frac{l_2}{T_2}\right] = S_1',$$

woraus sich ergibt

$$x_D = (S_1' - S_2')\frac{T_2}{l_2}. \tag{4}$$

Unter Anwendung der Beziehungen (2) und (4) erhalten wir

$$x_C - x_D = m\frac{T_2}{T_1}\frac{l_1}{l_2}.$$

Und für die freigesetzte Wärmemenge Q_2' erhalten wir aus Gl. (3) den Wert

$$Q_2' = m\frac{T_2}{T_1}l_1.$$

Beim CARNOT-Prozeß wird die Arbeit

$$W' = Q_1 - Q_2' = ml_1 - m\frac{T_2}{T_1}l_1 = ml_1\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

gewonnen, der Wirkungsgrad des Prozesses ist also durch

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

angegeben.

184. In einem Gefäß vom Volumen $V = 2\,\mathrm{m}^3$ befinden sich $m = 4$ kg Sauerstoff bei einer Temperatur $t = 29$ °C. Wie groß ist der Druck? Wie verändert sich der Druck, wenn wir das Gas bei konstantem Volumen auf die doppelte Temperatur erwärmen? Zur Berechnung soll die VAN-DER-WAALSsche Zustandsgleichung angewandt werden.

Lösung

Für ein Mol realen Gases hat die VAN-DER-WAALSsche Zustandsgleichung die Form

$$\left(p + \frac{a}{V_\mathrm{m}^2}\right)(V_\mathrm{m} - b) = RT \tag{1}$$

(V_m das von einem Mol eingenommene Volumen). Wenn wir eine beliebige Gasmenge der Masse m in Betracht ziehen, so hat sie bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck das Volumen

$$V = nV_\mathrm{m}$$

(n die Zahl der enthaltenen Mole).
Wenn wir mit Hilfe dieser Beziehung die Größe V_m in Gl. (1) ersetzen, erhalten wir nach Umformung

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Daraus erhalten wir

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2}\,.$$

Für den Druck des Sauerstoffs vor Beginn der Zustandsänderung finden wir nach Einsetzen der gegebenen Werte:

$$p = \frac{\dfrac{4\,\mathrm{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}\,0{,}082\,\mathrm{l\,atm\,K^{-1}\,mol^{-1}} \cdot 302\,\mathrm{K}}{2 \cdot 10^3\,\mathrm{l} - \dfrac{4\,\mathrm{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}\,0{,}03\,\mathrm{l\,mol^{-1}}} - \left(\frac{4\,\mathrm{kg}}{32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}}\right)^2 \frac{1{,}35\,\mathrm{l^2\,atm\,mol^{-2}}}{2^2 \cdot 10^6\,\mathrm{l^2}} = \underline{1{,}55\,\mathrm{atm}} = \underline{157\,000\,\mathrm{Pa}}.$$

Nach Vollzug der Zustandsänderung ändert sich der Druck um den Betrag

$$\Delta p = p' - p = \frac{nR(T_0 + 2t)}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2} - \frac{nR(T_0 + t)}{V - nb} + n^2 \frac{a}{V^2} =$$

$$= n \frac{Rt}{V - nb} = \underline{0{,}15 \text{ atm}} = \underline{15200 \text{ Pa}}.$$

185. Ein Mol realen Gases, das nach der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung behandelt wird, soll von einer Temperatur t_1 auf eine höhere Temperatur t_2 erwärmt werden. Sein Volumen ändert sich dabei von V_1 auf V_2. Berechnen Sie, wie sich bei dieser Zustandsänderung die innere Energie des Gases verändert.

Lösung

Das reale Gas verrichtet bei einer Volumenänderung auch gegen die inneren Kräfte Arbeit, die ihren Ursprung in der gegenseitigen Beeinflussung der Moleküle haben. Der innere Druck p_i, durch den wir diese gegenseitige Einwirkung erfassen, wird durch die Größe $p = a/V^2$ bestimmt. Die Gesamtarbeit, die das Gas gegen den Innendruck verrichtet, d. h.,

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p_i \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} \, dV = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right),$$

wird für eine Erhöhung der inneren Energie des Gases benötigt. Um diesen Betrag ist nach der angegebenen Zustandsänderung die innere Energie des realen Gases größer, als es die eines idealen Gases wäre.
Wenn wir voraussetzen, daß die spezifische Wärmekapazität von einem Mol Gas temperaturunabhängig ist, dann finden wir für die gesamte Änderung der inneren Energie die Beziehung

$$\underline{U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)}.$$

186. Berechnen Sie, wie sich die Temperatur eines der VAN-DER-WAALSschen Gleichung gehorchenden Gases ändert, wenn es dem Versuch von JOULE-THOMSON unterzogen wird. Wir setzen dabei voraus, daß die Konstante b in der VAN-DER-WAALSschen Gleichung vernachlässigt werden kann.

Lösung

In der Versuchsanordnung gemäß JOULE-THOMSON wird das Gas auf nicht umkehrbare Weise adiabatisch expandiert. Der Prozeß verläuft bei konstanter Enthalpie des Gases. Daher gilt $H_1 = H_2$ oder

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2, \tag{1}$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf den Anfangs- bzw. Endzustand des Gases beziehen. Für das Produkt pV finden wir gemäß der VAN-DER-WAALSschen Gleichung für 1 Mol

$$pV = \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V},$$

und, da $b = 0$ ist, ergibt sich

$$pV = RT - \frac{a}{V}. \tag{2}$$

Für die Berechnung der Änderung der inneren Energie des realen Gases wenden wir die Beziehung an, die in Beispiel 185 abgeleitet wurde:

$$U_2 - U_1 = C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \tag{3}$$

Wenn wir die Gln. (2) u. (3) in Gl. (1) einsetzen, finden wir

$$C_v(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = RT_1 - \frac{a}{V_1} - RT_2 + \frac{a}{V_2}.$$

Hieraus erhalten wir nach Umformung

$$\underline{T_2 - T_1 = \frac{2a}{C_v + R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).}$$

Da $V_2 > V_1$ ist, wird $T_2 < T_1$.
Das Gas kühlt sich also ab, es handelt sich um den sog. positiven JOULE-THOMSON-Effekt.

187. Die Eigenschaften und das Verhalten einiger realer Gase lassen sich recht gut mit der Beziehung

$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT$$

beschreiben. Berechnen Sie mit Hilfe der Konstanten a und b die Zustandsgrößen p, V und T im kritischen Zustand.

Lösung

Im kritischen Punkt hat die Isotherme des Gases einen Wendepunkt, und die Tangente der Isotherme verläuft parallel zur Volumenachse. Daher müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{dp}{dV} = 0; \quad \frac{d^2p}{dV^2} = 0. \tag{1}$$

Aus der angegebenen Zustandsgleichung resultiert

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2} \tag{2}$$

und

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{TV^3}; \quad \frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{TV^4}.$$

Für den kritischen Zustand finden wir unter Anwendung der Gl. (1)

$$\frac{RT_k}{(V_k-b)^2} = \frac{2a}{T_k V_k^3}; \quad \frac{2RT_k}{(V_k-b)^3} = \frac{6a}{T_k V_k^4}. \tag{3}$$

Wenn wir beide Gleichungen dividieren, erhalten wir nach Umformung

$$\underline{V_k = 3b.}$$

Für die Größen T_k und p_k finden wir aus den Gln. (2) u. (3) die Beziehungen

$$\underline{T_k^2 = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}; \quad p_k^2 = \frac{aR}{216\,b^3}}.$$

188. Berechnen Sie, wie sich die Entropie eines Mols Stickstoff verändert, wenn dieser bei einer Erwärmung von $t_1 = 27$ °C auf $t_2 = 100$ °C sein Volumen von $V_1 = 2$ l auf $V_2 = 3$ l vergrößert. Wir setzen voraus, daß wir das Gas entsprechend der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung behandeln können.

Lösung

Für eine infinitesimale Änderung der Entropie gilt

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dW'}{T}. \tag{1}$$

Die Änderung der inneren Energie dU ist bei einem realen Gas gegenüber dem idealen Gas um diejenige Arbeit vergrößert, die das Gas gegen den Innendruck (vgl. Beispiel 185) verrichtet. Dieser Anteil ist durch die Beziehung

$$dW_i' = \frac{a}{V^2}\,dV$$

gegeben. Für die infinitesimale Änderung der inneren Energie können wir also schreiben

$$dU = C_v\,dT + \frac{a}{V^2}\,dV. \tag{2}$$

Die Arbeit, die das Gas gegenüber äußeren Kräften verrichtet, berechnen wir aus der Beziehung

$$dW' = p\,dV.$$

Wenn wir die Angabe für den Druck p aus der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung entnehmen und hier einsetzen, erhalten wir

$$dW' = \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)dV. \tag{3}$$

Wir setzen die gefundenen Gln. (2) u. (3) in Gl. (1) ein und erhalten daraus nach Umformung

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V - b}.$$

Für die Gesamtänderung der Entropie finden wir

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V - b} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$S_2 - S_1 = 4{,}96 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{373 \text{ K}}{300 \text{ K}} +$$

$$+ 1{,}98 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 2{,}3 \lg \frac{(3 - 0{,}04) \text{ l mol}^{-1}}{(2 - 0{,}04) \text{ l mol}^{-1}};$$

$$\underline{S_2 - S_1 = 1{,}9 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}} = \underline{7{,}96 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}.$$

189. Eine gewisse Menge wasserfreien Kalziumchlorids ($CaCl_2$) der Masse $m_1 = 53{,}846$ g wurde bei einer Temperatur $t = 18$ °C in Wasser der Masse $m_2 = 100$ g aufgelöst. Die so geschaffene Lösung hat eine Dichte $\varrho = 1342$ g l^{-1}.
Bestimmen Sie die Konzentration der Lösung
a) in Massenprozenten p,
b) in der Molarität C,
c) in der Molalität C_m und
d) in Molbrüchen.

Lösung

a) Wenn die Gewichte der einzelnen Komponenten G_1 und G_2 und die zugehörigen Massen der Komponenten m_1 und m_2 sind, dann gilt

$$p = 100\% \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

d. h.,

$$p = 100\% \frac{53{,}846 \text{ g}}{53{,}846 \text{ g} + 100 \text{ g}} = \underline{35{,}0\%}.$$

b) Die Molarität C der Lösung ist die Zahl der Mole des gelösten Stoffes in einem Liter Lösungsmittel. Wenn die Lösung das Volumen V einnimmt und der gelöste Stoff aus n_1 Molen besteht, dann ist die Molarität durch die folgende Beziehung gegeben:

$$C = \frac{n_1}{V}.$$

Weiterhin können wir schreiben:

$$V = \frac{m_1 + m_2}{\varrho}; \qquad n_1 = \frac{m_1}{M_1}.$$

Die Masse eines Mols gelösten Stoffes (M_1) läßt sich leicht mit Hilfe der Atommassen ihrer Komponenten ermitteln. Für $CaCl_2$ ist $M_1 = 111 \text{ g mol}^{-1}$, so daß sich ergibt

$$C = \frac{m_1 \varrho}{M_1(m_1 + m_2)} = \frac{53{,}846 \text{ g} \cdot 1342 \text{ g l}^{-1}}{111 \text{ g mol}^{-1} \cdot 153{,}846 \text{ g}} = \underline{4{,}23 \text{ mol l}^{-1}}.$$

c) Die Molalität C_m der Lösung stellt die Anzahl der Mole des gelösten Stoffes in 1000 g Lösungsmittel dar. Auf $m_2 = 100$ g Lösungsmittel entfallen

$$n_1 = m_1/M_1$$

Mole gelösten Stoffes. Für die Molalität gilt dann

$$C_m = 10 n_1 = 10 \frac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}} = \underline{4{,}85 \text{ mol.}}$$

d) Der Molbruch der Komponenten A in der Lösung mit den beiden Komponenten A und B wird durch die Beziehung

$$\nu_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

bestimmt, in der n_A und n_B die jeweilige Zahl der Mole der beiden Komponenten A und B darstellen. Der Molbruch von $CaCl_2$ ist damit durch folgende Beziehung angegeben:

$$\nu_1 = \frac{\frac{m_1}{M_1}}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}} = \frac{\frac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}}}{\frac{53{,}846 \text{ g}}{111 \text{ g mol}^{-1}} + \frac{100 \text{ g}}{18 \text{ g mol}^{-1}}} = \underline{0{,}08.}$$

190. Über einer Lösung von 100 kg Masse, bestehend aus Benzol (C_6H_6) und Toluol ($C_6H_5CH_3$), hat der Gesamtdruck des Sattdampfes bei einer Temperatur von 100 °C einen Betrag von 942 Torr. Berechnen Sie, welche Mengen Toluol und Benzol die Lösung enthält, wenn die Spannung des Sattdampfes vom Benzol allein bei gegebener Temperatur die Größe $p_1^0 = 1340$ Torr und die des Toluols $p_2^0 = 560$ Torr annimmt. Die Lösung soll als Ideallösung angesehen werden.

Lösung

Ein homogenes Gemisch zweier Flüssigkeiten kann dann als ideales Gemisch angesehen werden, wenn die Partialdrücke der Komponenten (p_1 bzw. p_2) im Sattdampf ihren Molbrüchen (ν_1 bzw. ν_2) in der Flüssigkeit proportional sind. Wenn die Spannung der Sattdämpfe der ersten Komponente p_1^0 und der zweiten Komponente p_2^0 ist, dann ergibt sich für die Partialdrücke aus der Proportion

$$p_1 : p_1^0 = \nu_1 : 1 \quad \text{und} \quad p_2 : p_2^0 = \nu_2 : 1$$

$$p_1 = \nu_1 p_1^0 \quad \text{und} \quad p_2 = \nu_2 p_2^0, \tag{1}$$

wobei

$$\nu_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}. \tag{2}$$

Die Größen n_1 und n_2 stellen die zugehörigen Molzahlen der einzelnen beteiligten Komponenten dar.
Da $\nu_1 + \nu_2 = 1$ ist, können wir unter Anwendung der Gl. (1) wie folgt schreiben:

$$\frac{p_1}{p_1^0} + \frac{p_2}{p_2^0} = 1.$$

Der Gesamtdruck des Sattdampfes über der Lösung ist gleich der Summe der Partialdrücke aller Komponenten, also

$$p_1 + p_2 = p.$$

Diese Beziehung zusammen mit der vorhergehenden bietet die Lösung für die Drücke p_1 und p_2:

$$p_1 = p_1^0 \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p_2^0}; \quad p_2 = p_2^0 \frac{p_1^0 - p}{p_1^0 - p_2^0}. \tag{3}$$

Aus den Gln. (1) u. (2) ergibt sich

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{p_2^0}{p_1^0} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß $n_1 = m_1/M_1$ und $n_2 = m_2/M_2$ ist, erhalten wir unter Verwendung der Gln. (3)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p}.$$

Diese Beziehung liefert zusammen mit der Gleichung $m = m_1 + m_2$ die gesuchte Lösung

$$m_1 = \frac{M_1(p - p_2^0)}{M_2(p_1^0 - p) + M_1(p - p_2^0)} m$$

und $m_2 = m - m_1$.
Mit den gegebenen Werten finden wir

$$M_1 = 78 \text{ g mol}^{-1}; \quad M_2 = 92 \text{ g mol}^{-1};$$

$$m_1 = \frac{78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (942 - 560) \text{ Torr}}{92 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (1340 - 942) \text{ Torr} + 78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} (942 - 560) \text{ Torr}} 100 \text{ kg}$$

$$m_1 = \underline{44{,}9 \text{ kg}}; \quad m_2 = \underline{55{,}1 \text{ kg}}.$$

91. In einem Liter Wasser werden $m = 50$ g eines nicht dissoziierenden Stoffes bei der Temperatur $t = 95$ °C gelöst. Die über der Lösung befindlichen Sattdämpfe haben eine Spannung $p = 632{,}8$ Torr. Bestimmen Sie die Molmasse des gelösten Stoffes. Bei der

gegebenen Temperatur von 95 °C hat der gesättigte Wasserdampf eine Spannung von 634 Torr.

Lösung

Aus dem RAOULTschen Gesetz

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}$$

bestimmen wir die Anzahl n der Mole des gelösten Stoffes, und mit Hilfe der Beziehung $n = m/M$ die Masse eines Mols:

$$n = \frac{p_0 - p}{p} n_0 = \frac{m}{M};$$

$$M = \frac{p}{n_0(p_0 - p)} m,$$

worin n_0 die Anzahl der Mole des Wassers darstellt, d. h.,

$$n_0 = \frac{m_0}{M_0} = \frac{1000\ \mathrm{g}}{18\ \mathrm{g\ mol^{-1}}}.$$

Nach Einsetzen der Werte finden wir

$$M = \frac{632{,}8\ \mathrm{Torr}}{\frac{1000\ \mathrm{g}}{18\ \mathrm{g\ mol^{-1}}}(634 - 632{,}8)\ \mathrm{Torr}}\ 50\ \mathrm{g} = \underline{475\ \mathrm{g\ mol^{-1}}}.$$

192. In einem Liter Wasser wird bei einer Temperatur $t = 27$ °C Natriumchlorid der Masse $m = 2{,}92$ g gelöst. Welchen Wert wird der osmotische Druck der Lösung annehmen, wenn 44% der Moleküle des NaCl in Ionen dissoziieren?

Lösung

Der osmotische Druck von Stoffen, die elektrisch leitende Lösungen bilden, ist stets größer, als ihn das VAN'T-HOFFsche Gesetz angibt, denn die Moleküle dieser Stoff- dissoziieren bei der Lösung in Ionen, die als selbständige Moleküle wirken. Dadurch erhöht sich die Zahl der Teilchen je Volumeneinheit, und der osmotische Druck der Lösung steigt an.

Wir setzen voraus, daß n_0 die Zahl der Moleküle des gelösten Stoffes in der Volumeneinheit darstellt und daß keinerlei Dissoziation auftritt. Im Falle der Dissoziation aber sollen von dieser Zahl i Moleküle derart dissoziieren, daß jedes in zwei Ionen zerfällt. Dann wird die nach der Dissoziation in der Volumeneinheit enthaltene Zahl der Teilchen durch die Beziehung

$$n_0' = 2i + (n_0 - i)$$

gegeben sein. Da der osmotische Druck der Anzahl der Teilchen je Volumeneinheit direkt proportional ist, steigt er infolge der Dissoziation im Verhältnis

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{n_0'}{n_0} = \frac{2i + (n_0 - i)}{n_0} = k + 1,$$

wobei der Quotient der Zahl der dissoziierenden Moleküle zur Gesamtmolekülzahl n_0 mit dem Buchstaben k bezeichnet wird. Dann gilt

$$\pi' = \pi(k + 1).$$

Und wenn wir das VAN'T-HOFFsche Gesetz anwenden, finden wir

$$\pi' = \frac{m}{MV} RT(k + 1).$$

Die Masse eines Mols NaCl ist 58,5 g mol^{-1}, $k = 0{,}44$, so daß sich nach Einsetzen der gegebenen Werte ergibt

$$\pi' = \frac{2{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}082\ \text{l atm K}^{-1}\ \text{mol}^{-1} \cdot 300\ \text{K}\ (0{,}44 + 1)}{58{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg mol}^{-1} \cdot 1\ \text{l}} = \underline{1{,}77\ \text{atm.}}$$

193. Ein zylindrisches Rohr, das eine Rohrzuckerlösung ($C_{12}H_{22}O_{11}$) enthält, ist an seinem unteren Ende mit einer halbdurchlässigen Membran verschlossen. Es wird in ein anderes Gefäß eingetaucht, in dem sich reines Wasser befindet. Nach Herausbildung des Gleichgewichtszustands befindet sich der Spiegel der Lösung im Rohr um eine Höhe $h = 10$ cm über dem Flüssigkeitsspiegel des umgebenden Wassers. Das zylindrische Rohr habe eine Querschnittsfläche $A = 2$ cm^2, die Temperatur der Lösung betrage $t_0 = 13$ °C. Die Membran liege um eine Höhe $h_0 = 3$ cm unter dem Wasserspiegel. Berechnen Sie, welche Zuckermenge in der Lösung enthalten ist. Die Dichte der Lösung unterscheidet sich nur geringfügig von der des Wassers (Bild 89).

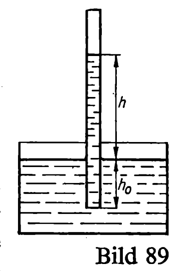


Bild 89

Lösung

Die halbdurchlässige Membran zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, daß sie keine gelösten Stoffe hindurchläßt, daß wohl aber die Moleküle des reinen Lösungsmittels gut hindurchgehen. Daher wird das Wasser allmählich in die Zuckerlösung eindringen, und das Experiment zeigt einen Anstieg des Spiegels der Lösung gegenüber dem des Lösungsmittels. Nach einer bestimmten Zeit tritt ein Gleichgewichtszustand ein. Er ist dadurch charakterisiert, daß der hydrostatische Druck der Flüssigkeitssäule über dem Spiegel des Lösungsmittels dem osmotischen Druck der Lösung gleich ist. Dann gilt

$$\pi = h\varrho g.$$

Unter der vereinfachenden Bedingung $\varrho \approx \varrho_0 \approx 10^3$ kg m^{-3} und unter Anwendung des VAN'T-HOFFschen Gesetzes können wir für den osmotischen Druck schreiben

$$\frac{m}{MV} RT = hg\varrho_0,$$

woraus sich ergibt

$$m = \frac{MVhg\varrho_0}{RT}.$$

Die Molmasse des Zuckers ist $M = 342\ \text{g mol}^{-1}$, das Volumen, das von der Lösung eingenommen wird, ist

$$V = A(h + h_0).$$

Nach dem Einsetzen finden wir

$$m = \frac{MgAh(h + h_0)\,\varrho_0}{RT}, \quad \text{d. h.,}$$

$$m = \frac{342 \cdot 10^{-3}\,\text{kg mol}^{-1} \cdot 9{,}81\,\text{m s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\,(10 + 3) \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{8{,}3\,\text{J K}^{-1}\,\text{mol}^{-1} \cdot 276\,\text{K}} \times$$
$$\times\ 1 \cdot 10^3\,\text{kg m}^{-3}$$

$$m = 3{,}67 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} = \underline{3{,}67\,\text{mg}}.$$

194. Durch Auflösen von $m = 30$ g eines bestimmten Stoffes in 300 cm³ Wasser entsteht eine Lösung, deren Erstarrungstemperatur um 0,6 K niedriger liegt als die des reinen Wassers. Wie groß ist die Molmasse des gelösten Stoffes? Bei der Lösung soll keine Dissoziation auftreten.

Lösung

Die Gefrierpunkterniedrigung in verdünnten Lösungen ist direkt proportional der Zahl C der Mole des in einem Liter Lösungsmittel gelösten Stoffes. Wenn sich in einem Volumen V die Masse m des gelösten Stoffes befindet, von dem ein Mol die Masse M hat, dann gilt

$$C = \frac{m}{MV}.$$

Die Gefrierpunkterniedrigung wird

$$\Delta t = -E_g \frac{m}{MV},$$

woraus sich ergibt

$$M = -\frac{E_g m}{\Delta t V}.$$

Nach Einsetzen der Werte erhalten wir

$$M = -\frac{1{,}86\,\text{K l mol}^{-1} \cdot 30 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}}{-0{,}6\,\text{K} \cdot 0{,}3\,\text{l}} = \underline{0{,}31\,\text{kg mol}^{-1}}.$$

A Aufgaben

232. Berechnen Sie, bei welcher Temperatur Eis unter dem Druck $p = 1520$ Torr schmilzt, wenn das spezifische Volumen des Eises $v_1 = 1{,}09 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}}$, des Wassers $v_2 = 10^{-3}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}}$ und die Schmelzwärme des Eises $l = 79{,}6$ kcal kg^{-1} beträgt.
233. Berechnen Sie, unter welchem Druck Wasser bei einer Temperatur von 99 °C siedet, wenn die Verdampfungswärme des Wassers bei 100 °C einen Wert von 539 kcal kg^{-1} hat und wenn das spezifische Volumen des Wasserdampfes bei dieser Temperatur $v_2 = 1675 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ kg^{-1} und in der kondensierten Phase $v_1 = 1{,}04 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}}$ beträgt.
234. Berechnen Sie das spezifische Volumen des Wasserdampfes bei einer Temperatur $t_1 = 300$ °C, wenn bei dieser Temperatur die Verdampfungswärme den Wert $l = 335{,}1$ kcal kg^{-1} hat und das spezifische Volumen in der kondensierten Phase $v_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}}$ ist. In der Umgebung der Temperatur t_1 ändert sich bei einer Temperaturänderung um 1 K der Druck der Sattdämpfe um einen Betrag von 12,5 N cm^{-2}.
235. Ein Mol Kohlendioxid wird bei 0 °C isotherm auf den vierten Teil seines Volumens im Normzustand komprimiert. Berechnen Sie, welcher Druck dazu erforderlich ist, wenn man das Gas
 a) als ideales Gas,
 b) als reales Gas entsprechend der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung behandelt ($a = 3{,}601 \cdot 10^6$ atm cm^6 mol^{-2}; $b = 42{,}672$ cm^3 mol^{-1}).
236. In einem realen Gas, das entsprechend der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung zu behandeln ist, verläuft ein Prozeß a) isotherm, b) isochor und c) isobar.
 Stellen Sie den Verlauf dieses Prozesses in p,V- und p,T-Diagrammen dar.
237. In einer Stahlflasche mit dem Volumen $V_0 = 0{,}53\ \mathrm{m^3}$ befindet sich unter einem Druck von $p_0 = 38 \cdot 10^3$ Torr ein Kilomol Kohlendioxid. Welche Temperatur hat das Gas entsprechend der VAN-DER-WAALSschen Gleichung? Die Konstanten sind:
 $a = 3{,}65 \cdot 10^5$ J m^3 kmol^{-2};
 $b = 0{,}043$ m^3 kmol^{-1}.
 Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit der Temperatur, die ein ideales Gas unter diesen Umständen hätte.
238. Ein Mol Kohlendioxid vergrößert sein Volumen vom ursprünglichen Wert $V_0 = 1$ l auf das Doppelte. Berechnen Sie, welche Arbeit das Gas dabei gegen die inneren Kräfte verrichten muß. Wir setzen voraus, daß das Gas der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung gehorcht.
239. Ermitteln Sie die Zahlenwerte der beiden Konstanten a und b in der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung für das Gas Sauerstoff, dessen kritischer Druck $p_k = 50$ at und dessen kritische Temperatur $t_k = -119$ °C beträgt.
240. Berechnen Sie die Werte für den kritischen Druck und die kritische Temperatur des Kohlendioxids unter der Voraussetzung, daß die Konstanten a und b der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung bekannt sind.
241. Berechnen Sie unter Benutzung der VAN-DER-WAALSschen Zustandsgleichung die Arbeit, die eine Menge $m = 50$ g Stickstoff gegen die äußeren Kräfte verrichtet, wenn sich das Gas bei der Temperatur $t = 27$ °C von einem Anfangsvolumen $V_1 = 0{,}5$ l isotherm auf das vierfache Volumen ausdehnt.
242. Eine zehnprozentige wäßrige Lösung von Methylalkohol (CH_3OH) hat bei der Temperatur $t = 20$ °C eine Dichte

$\varrho = 0{,}9815\ \mathrm{kg\,l^{-1}}$. Bestimmen Sie die Konzentration dieser Lösung in den Angaben: a) Molbruch; b) Molalität; c) Molarität.

243. Eine wäßrige Silbernitratlösung enthält bei einer Temperatur $t_0 = 100$ °C und einem Druck $p_0 = 760$ Torr $AgNO_3$ der Masse $m_1 = 110$ g und Wasser der Masse $m_2 = 100$ g. Bestimmen Sie die Konzentration dieser Lösung in den Angaben: a) Molalität; b) Massenprozente; c) Molbrüche.

244. Bestimmen Sie die Partialdrücke und den Gesamtdruck des Sattdampfes über einer Benzol-Chlorbenzol-Lösung bei einer Temperatur von 30 °C unter der Voraussetzung, daß diese Lösung als ideal angesehen werden kann. Der Molbruch des Benzols in der Lösung beträgt 0,25, die Spannung der Sattdämpfe des reinen Benzols hat bei der angegebenen Temperatur den Wert 118,2 Torr, die des Chlorbenzols dagegen 27,1 Torr.

245. Berechnen Sie die Spannung der Sattdämpfe über einer 5%igen wäßrigen Rohrzuckerlösung ($C_{12}H_{22}O_{11}$), wenn die Temperatur der Lösung 100 °C beträgt.

246. Berechnen Sie, wie hoch die Temperatur einer Lösung von 20 g Traubenzucker ($C_6H_{12}O_6$) in 2,2 l Wasser sein muß, damit ihr osmotischer Druck einen Wert von 912 Torr annimmt.

247. Berechnen Sie, welche Menge Natriumchlorid man bei einer Temperatur von 0 °C in Wasser lösen muß, damit die so mit einem Liter Wasser hergestellte Lösung einen osmotischen Druck von 1748,0 Torr aufweist. Wir setzen dabei voraus, daß das NaCl in der Lösung vollkommen dissoziiert ist.

248. Berechnen Sie die Werte der molalen Gefrierpunkterniedrigung E_g und der molalen Siedepunkterhöhung E_s von Wasser.

249. Bestimmen Sie, welche Menge an Glyzerin ($C_3H_8O_3$) in 100 g Wasser gegossen werden muß, damit das so gebildete Gemisch bei einer Temperatur von -2 °C erstarrt.

250. In einem Wasserbad von einem Liter Inhalt werden 100 Gramm Rohrzucker ($C_{12}H_{22}O_{11}$) gelöst. Berechnen Sie, bei welchen Temperaturen unter Normalbedingungen diese Lösung erstarren und sieden wird.

2.5. Wärmeleitung

Bei der Wärmeübertragung auf dem Wege der Wärmeleitung in einem Stab, dessen Temperatur in seiner Längsausdehnung gleichmäßig abnimmt, existiert ein stationärer Zustand. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß die Wärmemenge Q, die durch einen beliebig gelegten Querschnitt in der Zeit τ hindurchtritt, direkt proportional der Größe der Querschnittsfläche A, der Zeit τ, dem Temperaturunterschied der beiden Stabenden $t_1 - t_2$ und umgekehrt proportional zur Stablänge l ist. Es gilt

$$Q = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau. \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor λ wird **Wärmeleitfähigkeit** des Stabes genannt. Wenn wir mit der Dichte des Wärmestroms i diejenige Wärmemenge bezeichnen, die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Wärmeausbreitung gelegte Flächeneinheit

strömt, dann ist diese Dichte des Wärmestroms gemäß Gl. (1) in jedem beliebigen Stabquerschnitt durch die Beziehung

$$i = \frac{Q}{A\tau} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{l}$$

gegeben.

Wenn wir die Stabachse mit der x-Achse identifizieren und festlegen, daß diese auch die Richtung der Temperaturabnahme ist, und wenn wir den Temperaturabfall in jedem infinitesimal kleinen Abschnitt des Stabes mit $-\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ bezeichnen, dann ist die Dichte des Wärmestroms in eben jenem Punkt durch folgende Beziehung gegeben:

$$i = \frac{Q}{A\tau} = -\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

Mit dieser Beziehung wird die Dichte des Wärmestroms auch in solchen isotropen Körpern richtig wiedergegeben, in denen die Temperatur ungleichmäßig abnimmt.

Die Wärmemenge, die bei einem stationären Wärmestrom radial durch den Mantel eines Hohlzylinders mit den Abmessungen Innenradius r_1 und Außenradius r_2 in der Zeit τ hindurchströmt, ist

$$Q = 2\pi l \lambda \tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

wobei l die Länge des Zylinders, $t_1 - t_2$ die Differenz der Randtemperaturen auf der Innen- bzw. Außenfläche des Hohlzylinders ist.

Betrachten wir den Durchtritt der Wärme durch eine Trennfläche, die einen festen Stoff von einer Flüssigkeit oder einem Gas trennt:

Wenn das Gas die Temperatur t und die Oberfläche eines festen Körpers die Temperatur t' aufweist, dann kann man für die Dichte des Wärmestroms, der auf die Wandung des Festkörpers auftrifft, folgende Beziehung aufstellen:

$$i = \alpha(t - t'),$$

worin α den sog. **Wärmeübergangskoeffizienten** bedeutet.

Wenn die Wärme durch eine Wand hindurchtritt, die zwei Gase von unterschiedlicher Temperatur voneinander trennt, dann gelten für die Dichte des auftretenden Wärmestroms gleichzeitig die Beziehungen

$$i = \alpha_1(t_1 - t_1') = \lambda \frac{t_1' - t_2'}{d} = \alpha_2(t_2' - t_2)$$

(t_1 bzw. t_2 die Temperaturen der beiden Gase, t_1' bzw. t_2' die Temperaturen an den Wandoberflächen, d Wanddicke, α_1 bzw. α_2 die zugehörigen Wärmeübergangskoeffizienten, λ die Wärmeleitfähigkeit der Trennwand).

B Beispiele

195. Wir halten das eine Ende eines Stahlstabes der Länge $l = 0{,}2$ m und der Querschnittsfläche $A = 3\ \text{cm}^2$ auf einer konstanten Temperatur $t_1 = 300$ °C, während das andere Ende des Stabes in schmelzendes Eis getaucht wird. Es sei vorausgesetzt, daß keine Wärmeverluste an die Umgebung auftreten. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Menge an Eis, die während einer Versuchsdauer von $\tau = 10$ min geschmolzen wird.

Lösung

Im stationären Zustand tritt durch einen beliebigen Stabquerschnitt während der Zeit τ die Wärmemenge

$$Q = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau.$$

Da keinerlei Wärmeverlust an die Umgebung auftreten soll, kann diese gesamte Wärmemenge für den Schmelzprozeß des Eises angesetzt werden. Wenn wir die Masse des in der Zeit τ schmelzenden Eises mit der Größe x und die Schmelzwärme des Eises mit der Größe s bezeichnen, dann ist die Beziehung

$$\lambda A \frac{t_1 - t_2}{l} \tau = xs$$

erfüllt, woraus sich ergibt

$$x = \lambda A \frac{t_1 - t_2}{ls} \tau,$$

oder mit den gegebenen Werten ausgerechnet

$$x = 0{,}14\ \text{cal K}^{-1}\ \text{cm}^{-1}\ \text{s}^{-1} \cdot 3\ \text{cm}^2 \frac{300\ \text{K}}{79{,}7\ \text{cal g}^{-1} \cdot 20\ \text{cm}} \cdot 10 \cdot 60\ \text{s},$$

$$\underline{x = 47{,}4\ \text{g}.}$$

196. Ein Messingstab der Länge $l_1 = 15$ cm ist mit einem Stahlstab von gleichem Querschnitt und der Länge $l_2 = 8$ cm verbunden. Das freie Ende des Messingstabes wird auf einer konstanten Temperatur $t_1 = 150$ °C gehalten, das des Stahlstabes auf $t_2 = 20$ °C. Wärmeverluste an die Umgebung sollen nicht eintreten. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Dichte des Wärmestroms im Stab sowie die Temperatur, die an der Berührungsfläche der beiden Metalle herrscht.

Lösung

Die Dichte des Wärmestroms, die die in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Wärmeausbreitungsrichtung gelegte Flächeneinheit hindurchtretende Wärmemenge darstellt, ist bei stationärem Wärmestrom in beiden Stäben die gleiche. Es ist also

$$i = \frac{Q}{A\tau} = \lambda_1 \frac{t_1 - t_1'}{l_1} = \lambda_2 \frac{t_1' - t_2}{l_2},$$

wobei t_1' die Temperatur an der Berührungsfläche der beiden Stäbe bedeutet. Daraus finden wir

$$t_1 - t_1' = \frac{il_1}{\lambda_1}; \quad t_1' - t_2 = \frac{il_2}{\lambda_2}. \tag{1}$$

Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir

$$t_1 - t_2 = i\left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right),$$

woraus sich ergibt

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{l_1}{\lambda_1} + \dfrac{l_2}{\lambda_2}},$$

d. h.,

$$i = \frac{(150 - 20)\ \text{K}}{\dfrac{15\ \text{cm}}{0{,}95\ \text{cal K}^{-1}\ \text{cm}^{-1}\ \text{s}^{-1}} + \dfrac{8\ \text{cm}}{0{,}14\ \text{cal K}^{-1}\ \text{cm}^{-1}\ \text{s}^{-1}}} = \underline{1{,}78\ \text{cal cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}}.$$

Für die Temperatur t_1' an der Berührungsfläche der beiden Stäbe erhalten wir aus Gl. (1) nach Einsetzen folgenden Wert:

$$t_1' = t_1 - i\frac{l_1}{\lambda_1} = \underline{121{,}9\ °\text{C}}.$$

197. Zwei Metallplättchen, das eine aus Kupfer mit der Dicke $h_1 = 0{,}6$ cm und das andere aus Eisen mit der Dicke $h_2 = 0{,}4$ cm, werden fest aneinandergelegt. Berechnen Sie, welchen Wert die Wärmeleitfähigkeit einer homogenen Metallplatte der Dicke $h = 1{,}0$ cm annehmen muß, damit sie die gleiche Wärmemenge fortleitet wie die aus den beiden obengenannten Plättchen zusammengesetzte.

Lösung

Wenn t_1 und t_2 die Randtemperaturen der zusammengelegten Kupfer- und Eisenplättchen sind, und wenn λ_1 und λ_2 die zugehörigen spezifischen Wärmeleitfähigkeiten von Kupfer und Eisen darstellen, dann ist die Dichte des Wärmestroms in jedem be-

liebigen Querschnitt wie folgt definiert:

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2}}.$$

Eine homogene Platte, durch welche die beiden Plättchen ersetzt werden sollen, muß eine Wärmeleitfähigkeit haben, die bewirkt, daß in jedem beliebigen ihrer Querschnitte bei gleicher Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ der hindurchtretende Wärmestrom die gleiche Dichte wie im Fall der zusammengesetzten Plättchen annimmt. Deshalb ist

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2}},$$

woraus sich ergibt

$$\lambda = h \frac{\lambda_1 \lambda_2}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1},$$

d. h.,

$$\underline{\lambda = 0{,}285 \text{ cal cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}} = \underline{120 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}}.$$

198. Eine zylinderförmige Stahlrohrleitung ist mit einer wärmeisolierenden Asbestverkleidung von 3 cm ummantelt. Das Rohr hat einen Innendurchmesser $d_1 = 7{,}0$ cm und einen Außendurchmesser $d_2 = 7{,}6$ cm. An der Innenwand der Rohrleitung herrscht eine Temperatur $t_1 = 10$ °C, an der Außenfläche des Asbestmantels eine vom Betrag $t_2 = -10$ °C. Die Rohrleitung hat eine Länge von einem Meter. Berechnen Sie, welche Wärmemenge durch die Rohrleitung während einer Zeit $\tau = 24$ h an die Umgebung abgeführt wird. Um welchen Betrag würde sich unter sonst gleichen Bedingungen der Wärmeverlust ändern, wenn keine Wärmeisolation angebracht wäre?

Lösung

Bei radialem Wärmedurchgang durch eine einfache zylindrische Rohrleitung strömt während der Zeit τ durch eine zylindrische Fläche die Wärmemenge

$$Q = 2\pi\, l\lambda\tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{1}$$

(r_1 Innenradius, r_2 Außenradius der Rohrleitung, l ihre Länge, $t_1 - t_2$ Differenz der Randtemperaturen).
Wenn die zylindrische Rohrleitung aus mehreren Schichten besteht, dann tritt im stationären Zustand durch eine beliebig gelegene Zylinderfläche in der gleichen Zeit die gleiche Wärmemenge hindurch. Somit finden wir im Fall zweier Schichten:

$$Q = 2\pi l \lambda_1 \tau \frac{t_1 - t_1'}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi l \lambda_2 \tau \frac{t_1' - t_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \tag{2}$$

(t_1 und t_2 Randtemperaturen, t_1' Temperatur an der Berührungsfläche, r_3 äußerer Radius der zweiten Schicht).
Aus Gl. (2) erhalten wir nach Addition der Temperaturdifferenzen

$$t_1 - t_1' + t_1' - t_2 = \frac{Q}{2\pi l\tau}\left(\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2}\right).$$

Nach einer Umstellung erhalten wir für die Menge der abströmenden Wärme folgende Beziehung:

$$Q = 2\pi l\tau(t_1 - t_2)\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2}}. \qquad (3)$$

Die Auswertung mit den gegebenen Größen ergibt

$$Q = 2\pi \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 24\,\mathrm{h}\,\times$$

$$\times \frac{20\,\mathrm{K}}{\frac{1}{0{,}14 \cdot 3600 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{m\,h\,K}}}\,2{,}3\lg\frac{76}{70} + \frac{1}{0{,}18 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{m\,h\,K}}}\,2{,}3\lg\frac{136}{76}} =$$

$$= \underline{933{,}5\,\mathrm{kcal}} = \underline{3900\,\mathrm{kJ}}.$$

Im Falle, daß keinerlei isolierende Rohrummantelung besteht, können wir die Menge der abströmenden Wärme gemäß Gl. (1) bestimmen:

$$Q_1 = 2\pi l\tau(t_1 - t_2)\frac{1}{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Daraus folgt

$$Q_1 = 1{,}85 \cdot 10^6\,\mathrm{kcal} = 7{,}75 \cdot 10^6\,\mathrm{kJ}$$

und somit

$$\underline{Q_1 = Q \cdot 1{,}9 \cdot 10^3.}$$

199. Zwischen zwei konzentrischen Hohlkugeln mit den Radien r_1 und r_2 ($r_2 > r_1$) befindet sich ein homogener Stoff mit der Wärmeleitfähigkeit λ, der sehr gut wärmeleitend sein soll. Bestimmen Sie in dieser Anordnung
a) die Wärmemenge, die während der Zeitspanne τ bei stationärem Wärmestrom durch eine beliebige, zu den beiden erstgenannten konzentrisch gelegene Kugelfläche hindurchtritt,
b) die Temperaturverteilung im Raum zwischen den beiden konzentrischen Kugelflächen.
Im Zustand der stationären Wärmeströmung sind die Temperaturen der inneren und der äußeren Kugel t_1 und t_2 ($t_2 > t_1$) als konstant anzusehen.

Lösung

a) Bei stationärem Wärmestrom fließt durch eine Kugelfläche mit dem Radius x während der Zeit τ die Wärmemenge

$$Q = -\lambda A\tau \frac{dt}{dx} = -\lambda 4\pi x^2 \tau \frac{dt}{dx},$$

die vom Radius der Kugelfläche unabhängig ist. Nach Umformung erhalten wir eine Differentialgleichung

$$Q \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \, dt. \qquad (1)$$

Nach deren Integration in den Grenzen r_1 bis r_2 bzw. von t_1 bis t_2

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t_2} dt$$

erhalten wir für die gesuchte Wärmemenge die folgende Beziehung:

$$\underline{Q = 4\pi\lambda\tau \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (t_1 - t_2).} \qquad (2)$$

b) Die Wegabhängigkeit der Temperatur im Raum zwischen den beiden Kugelflächen erhalten wir durch Integration der Gl. (1) in den Grenzen von r_1 bis x bzw. von t_1 bis t, d. h.,

$$Q \int_{r_1}^{x} \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t} dt,$$

woraus sich ergibt

$$Q = 4\pi\lambda\tau \frac{r_1 x}{x - r_1} (t_1 - t). \qquad (3)$$

Im stationären Zustand ist die Wärmeströmung durch jede Kugelfläche gleich groß, deshalb erhalten wir durch Vergleich der Gln. (2) u. (3) den Zusammenhang

$$\frac{x}{x - r_1} (t_1 - t) = \frac{r_2}{r_2 - r_1} (t_1 - t_2).$$

Nach geringfügiger Umformung und Auflösung nach t ergibt sich hieraus

$$\underline{t = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{t_1 - t_2}{x} + \frac{r_2 t_2 - r_1 t_1}{r_2 - r_1}.}$$

200. Unter einem Dampfkessel befindliche Rauchgase haben eine Temperatur $t_0 = 950$ °C, während das im Kessel befindliche Wasser eine Temperatur $t = 180$ °C hat. Berechnen Sie die Wärmemenge, die innerhalb einer Stunde durch einen Quadratmeter Kessel-

fläche dem Kesselwasser zugeführt wird, wenn die Kesselwandung $d_2 = 1{,}8$ cm dick ist und an ihrer Innenseite mit einer Kesselsteinschicht der Dicke $d_3 = 0{,}5$ cm und an ihrer Außenseite mit einer Ruß- und Ascheschicht der Dicke $d_1 = 0{,}45$ cm bedeckt ist. Die Kesselwandung selbst besteht aus Stahl. Bestimmen Sie die Temperatur der äußeren und der inneren Kesselwandung.

Lösung

Die Wärme tritt aus den Gasen mit der Temperatur t_0 allmählich durch die Ruß- und Ascheschicht, die eiserne Kesselwandung und den Kesselstein in das Wasser der Temperatur t über. Im stationären Zustand ist die Dichte des Wärmestroms für jede durchflossene Schicht gleich groß. Wenn wir die zugehörigen Temperaturen an den jeweiligen Berührungsflächen durch die Symbole t_1 (Asche – Gase), t_2 (Kesselwandung – Ruß), t_3 (Kesselstein – Kesselwandung) und t_4 (Wasser – Kesselstein) bezeichnen, dann können wir die Dichte des Wärmestroms wie folgt ausdrücken:
$i = \alpha_1(t_0 - t_1) = \cdots$ für den Übertritt der Wärme aus den Gasen in die Ascheschicht,
$i = \lambda_1 \dfrac{t_1 - t_2}{d_1} = \lambda_2 \dfrac{t_2 - t_3}{d_2} = \lambda_3 \dfrac{t_3 - t_4}{d_3} = \ldots$ für die einzelnen festen Schichten,
$i = \alpha_2(t_4 - t) = \cdots$ für den Übertritt der Wärme aus dem Kesselstein ins Wasser, wobei λ_i die entsprechenden Wärmeleitfähigkeiten und α_i die Wärmeübergangskoeffizienten bedeuten.
Wir können mit Hilfe dieser Gleichungen die Temperaturdifferenzen ausdrücken:

$$(1)\quad t_0 - t_1 = \frac{i}{\alpha_1}; \qquad (2)\quad t_1 - t_2 = i\frac{d_1}{\lambda_1}; \qquad (3)\quad t_2 - t_3 = i\frac{d_2}{\lambda_2};$$

$$(4)\quad t_3 - t_4 = i\frac{d_3}{\lambda_3}; \qquad (5)\quad t_4 - t = \frac{i}{\alpha_2}.$$

Wenn wir die Gln. (1) bis (5) addieren, erhalten wir

$$t_0 - t = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

woraus sich ergibt

$$i = k(t_0 - t),$$

worin die Proportionalitätskonstante k, der Wärmeübergangskoeffizient für eine Wand, aus der Beziehung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}$$

bestimmt wird. Nach Einsetzen der Werte finden wir somit

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{15} + \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}07} + \frac{18 \cdot 10^{-3}}{50} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{1}{4000}\right)\frac{1}{\text{kcal m}^{-2}\,\text{h}^{-1}\,\text{K}^{-1}},$$

$$k = 7{,}46 \text{ kcal m}^{-2}\,\text{h}^{-1}\,\text{K}^{-1}.$$

Damit ergibt sich die gesamte Wärmemenge, die dem Wasser während der Zeit τ durch die Kesselfläche A zugeführt wurde, zu

$$Q = A\tau k(t_0 - t);$$

$$Q = 1\ \text{m}^2 \cdot 1\ \text{h} \cdot 7{,}46\ \text{kcal m}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}\ (950 - 180)\ \text{K} = 5744\ \text{kcal}.$$

Die Temperatur der Außenwandung des Kessels bestimmen wir durch Addition der Gln. (1) u. (2), womit wir erhalten

$$t_0 - t_2 = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right).$$

Daraus entnehmen wir

$$t_2 = t_0 - i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right) = \underline{197{,}5\ °\text{C}}.$$

Schließlich erhalten wir aus Gl. (3) die Temperatur an der Innenwandung

$$t_3 = t_2 - i\frac{d_2}{\lambda_2} = \underline{195{,}4\ °\text{C}}.$$

A Aufgaben

251. Ermitteln Sie, welche Wärmemenge innerhalb einer Stunde durch einen Quadratmeter Ziegelmauerfläche der Dicke $d = 0{,}5$ m hindurchströmt, wenn die Innentemperatur $t_1 = 18$ °C und die Außentemperatur $t_2 = -2$ °C beträgt. Wärmeverluste in die Umgebung sollen nicht auftreten.
252. Auf einem Kocher wird Wasser in einem Aluminiumgefäß erhitzt. Das Wasser im Gefäß siedet bei 100 °C. In jeder Minute bilden sich $m = 200$ g Dampf. Der Gefäßboden hat die Dicke $h = 0{,}2$ cm und die Fläche $A = 200\ \text{cm}^2$. Berechnen Sie die Temperatur an der unteren Grenze des Gefäßbodens, wenn vorausgesetzt wird, daß sich der gesamte Gefäßboden gleichmäßig erhitzt und daß Wärmeverluste an den Gefäßwänden und an die Umgebung vernachlässigt werden.
253. Berechnen Sie die Wärmemenge, die durch Wärmeleitung stündlich von einer Ziegelmauer mit der Dicke $d = 0{,}43$ m und den Seiten 6,5 m · 3,2 m abgeführt wird, die beiderseitig mit einer 1 cm dicken Putzschicht bedeckt ist. An der Außenseite beträgt die Temperatur $t = -5$ °C, an der Innenseite $t_0 = 20$ °C. Um welchen Betrag ändert sich die abfließende Wärmemenge, wenn die Mauer an ihrer Innenseite noch mit einer Heraklitschicht der Dicke $d_2 = 5$ cm verkleidet wird?
254. Berechnen Sie, wie groß die Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenfläche eines kupfernen Hohlzylinders sein muß, wenn bei stationärer Wärmeströmung in jeder Minute durch eine Fläche von 1500 cm² 200 kcal hindurchtreten. Die Radien des Hohlzylinders sind $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm.
255. Eine 12 cm dicke Ziegelmauer ist beiderseits mit einer 1,5 cm dicken Putzschicht bedeckt. Die Mauer soll durch eine zusätzlich anzubringende Heraklitplatte wärmeisoliert werden, so daß ihr Wärmedämmvermögen dem einer 38 cm

dicken, beiderseits mit 1,5 cm Putz versehenen Ziegelmauer entspricht. Wie dick muß die zusätzlich anzubringende Heraklitschicht sein?

256. Berechnen Sie die Wärmemenge, die in einer Stunde durch eine nicht verputzte, 30 cm dicke Ziegelmauer von 16,5 m^2 Flächeninhalt strömt, wenn die Innentemperatur $t_1 = 22$ °C und die Außentemperatur $t_2 = -12$ °C ist. Die Wärmeübergangskoeffizienten sind: $\alpha_1 = 7$ kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1} an der Innenfläche und – mit Berücksichtigung des Einflusses der kalten Luftströmung – $\alpha_2 = 20$ kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1} an der Außenfläche der Mauer.

257. In einem dickwandigen, abgeschlossenen Gefäß aus Metall befindet sich bei einer Temperatur t_1 eine Flüssigkeit. Die Temperatur der das Gefäß umgebenden Außenluft beträgt t_2. Berechnen Sie die Temperatur t' an der Außenwandung des Gefäßes, wenn die Wärmeleitfähigkeit des Gefäßmaterials mit λ und die Wärmeübergangszahl für die Trennfläche Metall – Luft mit α angegeben wird. Für die innere Trennfläche Flüssigkeit – Metall sei sie als unendlich groß angenommen. Die Gefäßwandung habe die Dicke d.

Lösungen zu den Aufgaben

1. $v = 1{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $a = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $\cos\alpha = \cos(v, x) = \cos(a, x) = 0{,}8$; $\alpha = 36{,}8°$
2. $v = 131\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_1 = 113\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $v_2 = 149\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
3. $v = \omega\sqrt{x^2 - k^2}$; $a = \omega^2 x$
4. Die Bahn ist eine archimedische Spirale der Form $r = \frac{n}{b}\varphi$; $v = n\sqrt{1 + b^2t^2}$; $a = nb\sqrt{4 + b^2t^2}$
5. $v_{10} = 3{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
6. $a = -0{,}78\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
7. $t = 10\,\mathrm{s}$
8. $t = 5\,\mathrm{s}$; der Treffpunkt liegt 15 m vom Ausgangsort des ersten Körpers entfernt
9. $t = 0{,}04\,\mathrm{s}$; $a = 12500\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
10. $t = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1(\sqrt{7} - \sqrt{6}) \approx 0{,}8\,\mathrm{s}$
11. $v_0 = 18\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
12. $t = 3\,\mathrm{s}$; $h = 150{,}9\,\mathrm{m}$
13. $d = 2v_0t$
14. $h = 385{,}8\,\mathrm{m}$
15. $v_0 = 98{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $h = 490{,}5\,\mathrm{m}$
16. $t = 0{,}204\,\mathrm{s}$; $\overline{AB} = 0{,}298\,\mathrm{m}$
17. $v_{20} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $s_{20} = 1333\,\mathrm{m}$
18. $v_1 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $s_1 = 833\,\mathrm{m}$
19. $a = k_1\,\mathrm{e}^{-k_2t}$; $v = \frac{k_1}{k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-k_2t}\right)$; $s = \frac{k_1}{k_2}\left(t + \frac{1}{k_2}\mathrm{e}^{-k_2t} - \frac{1}{k_2}\right)$
20. $s = 102\,\mathrm{km}$
21. $v_0 = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $\varphi_0 = 60°$
22. $T = 0{,}63\,\mathrm{s}$; $n = 1{,}59\,\mathrm{s^{-1}}$; $a_n = 200\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
23. $a_t = 0{,}4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $a_n = 12{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $a = 12{,}806\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
24. $a_t = 0{,}111\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $a_n = 0{,}222\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; $a = 0{,}248\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
25. $n = 35{,}8$
26. $\omega = 10\pi\,\mathrm{s^{-1}}$
27. $n = 60\,\mathrm{min^{-1}}$
28. Die Bewegung des Schiffes muß senkrecht zur Strömung des Flusses gerichtet sein; $t = 60\,\mathrm{s}$
29. $v = 29\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
30. $a = \omega c \sin\varphi\sqrt{\omega^2t^2 + 4}$
31. $a = \frac{\pi^2}{900}r(n_1 - n_2)^2$
32. $a = \omega\sqrt{r'^2\omega^2 + 4v'^2}$
33. $l \geqq \frac{2T_0a}{\sqrt{4T_0^2 - Q^2}}$
34. $K = F\sqrt{6} = 61{,}24\,\mathrm{kp} = 600{,}8\,\mathrm{N}$
35. $m = 0{,}05\,\mathrm{kg}$; $v = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
36. $F = 6 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$; $W = 36 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$
37. $F = 1{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$
38. a) An den Polen ist $F_z = 0$ und $F_C = \max$; b) am Äquator ist $F_z = \max$ und $F_C = 0$.
39. $t = 20{,}4\,\mathrm{s}$; $s = 204\,\mathrm{m}$
40. a) $F_1 = 73{,}5\,\mathrm{kp} = 720\,\mathrm{N}$ in beiden Fällen; b) $F_2 = 76{,}1\,\mathrm{kp} = 747\,\mathrm{N}$ in beiden Fällen

41. $\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$
42. $s = \frac{mv_0}{k}$
43. $\omega = \sqrt{\frac{F-G}{ml}} = 4{,}43\ \mathrm{s}^{-1}$
44. $F = 100\ \mathrm{N}$
45. $t_1 = 9\ \mathrm{s}$
46. $F = 135{,}9\ \mathrm{kp} = 1332\ \mathrm{N}$; die Kraft wirkt der Fahrtrichtung entgegen
47. $W = 70{,}6\ \mathrm{kN\,m}$
48. $W = 12{,}8\ \mathrm{kp\,m} = 125\ \mathrm{N\,m}$
49. $W = 24\ \mathrm{N\,m}$
50. $s = 0{,}16\ \mathrm{m}$
51. $F = 77{,}16\ \mathrm{N}$
52. $v_2 = 30\ \mathrm{km\,h^{-1}}$
53. $h_{\max} = 35{,}5\ \mathrm{m}$
54. $P = 14{,}7\ \mathrm{kW}$
55. $P = 20{,}4\ \mathrm{kW}$
56. $\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3rg}$; $v_0 \geqq rg$
57. $F_h = 0{,}998\ F_0$
58. $V = -\gamma \frac{m}{\sqrt{s^2 + r^2}}$; $\vec{E} = \gamma \frac{ms}{(s^2 + r^2)^{3/2}} \vec{\varrho}$
59. $g_M \approx 0{,}2\, g_E = 0{,}2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 1{,}962\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
60. $v_0 = 7{,}9\ \mathrm{km\,s^{-1}}$
61. $x_S = -1{,}54\ \mathrm{cm}$; $y_S = -0{,}62\ \mathrm{cm}$; $z_S = 0{,}75\ \mathrm{cm}$
62. $x_S = \frac{\pi b}{8}$
63. $x_S = \frac{a}{9}$
64. $x_S = y_S = \frac{2r}{\pi} = 6{,}3\ \mathrm{cm}$; Nullpunkt des Koordinatensystems im Kreismittelpunkt; Koordinatenachsen sind die Radien, die den Viertelkreis begrenzen
65. $x_S = 0$; $y_S = \frac{3}{8} r$; $z_S = 0$
66. $y_S = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} x_S + \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$; $v_S = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}$
67. $v = \frac{m_2 v_0}{m_1} = 0{,}1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
68. $v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}392\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; das Vorzeichen gibt an, daß der Wagen nach Auftreffen der Kugel seine Bewegungsrichtung umkehrt
69. $F_r = \frac{dm}{dt} v_r = 3{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$
70. $J = \frac{1}{4} mr^2$
71. $J = \frac{1}{6} ma^2$
72. $J = \frac{2}{5} mr^2$
73. $J = \frac{1}{12} ma^2 \approx 0{,}0017\ \mathrm{kg\,m^2}$
74. $\tan\varphi = \frac{8Q}{3G}$; $\varphi \approx 53°\ 10'$
75. $h = \frac{2r}{\tan\alpha} = 0{,}567\ \mathrm{m}$
76. $\tan\varphi = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = 0{,}8$; $\varphi = 38°\ 40'$
77. $\alpha = 0{,}0363\ \mathrm{s^{-2}}$; $W = 5{,}88\ \mathrm{kp\,m} = 57{,}7\ \mathrm{Nm}$
78. $\omega = \sqrt{\frac{3g \tan\varphi}{3a + 2l_0 \sin\varphi}} = 2{,}06\ \mathrm{s^{-1}}$
79. $W_k = 0{,}00924\ \mathrm{J}$
80. $\omega \approx 3{,}13\ \mathrm{s^{-1}}$
81. $v_0 = \sqrt{3gl} = 5{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
82. $v = \sqrt{gs \sin\varphi} = 4{,}95\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
83. $M = 0{,}0314\ \mathrm{Nm}$
84. $\Delta\omega = 0{,}6\ \mathrm{s^{-1}}$
85. $x = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0{,}07\ \mathrm{m}$
86. $l_r = \frac{2}{3} l = 0{,}666\ \mathrm{m}$
87. $F = \frac{mr^2\omega^2 \sin 2\varphi}{8l} = 0{,}333\ \mathrm{N}$
88. $F = 1{,}036\ \mathrm{kN}$
89. $l = 2{,}001\ \mathrm{m}$
90. $\sigma = 2{,}45\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$; $\Delta l = -0{,}044\ \mathrm{mm}$
91. $\Delta l = 12{,}28\ \mathrm{m}$
92. $\Delta V = \frac{l_0 F(m-2)}{mE}$
93. $\Delta V = -9{,}72\ \mathrm{mm^3}$
94. $F = 377\ \mathrm{N}$
95. $h = 3{,}33\ \mathrm{cm}$
96. $M = 41{,}08\ \mathrm{N}$
97. $T = 2{,}51\ \mathrm{s}$
98. $F = 12990\ \mathrm{kp} = 127500\ \mathrm{N}$
99. $r \geqq 0{,}89\ \mathrm{mm}$
100. $p = b + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 x^2 + \varrho g h$
101. $p = 1{,}145\ \mathrm{atm} = 1{,}16 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$

102. $h = 5556$ m
103. $F = \pi r^2 \varrho g(h - h_1) = 617$ N
104. $F = 1263$ kp $= 12390$ N
105. $\varrho = 2,5$ g cm^{-3}
106. $F = 10$ kp $= 98,1$ N
107. Gewicht der Kugel: $G_1 = 7,4$ N; Auftrieb: $G_2 = 5,1$ N; die Kugel sinkt zu Boden
108. $2r_1 = 10,46$ cm; $d = 0,1$ cm
109. $\varrho = 0,79$ g cm^{-3}
110. $h = h_1 + h_2$
111. $v = 1,144$ m s^{-1}
112. $t_0 = \frac{A}{\mu A_1}\sqrt{\frac{h_0}{g}} \times (\sqrt{2} - 1)$
113. $t = 0,53$ s
114. $F = \varrho A v(v - u)$; $u = \frac{1}{2} v$
115. $v = 2,7$ cm s^{-1}
116. $\sigma = 49,7 \cdot 10^{-3}$ J m^{-2}
117. $\sigma = 72,1 \cdot 10^{-3}$ J m^{-2}
118. $T = 0,486$ s
119. $\mu = 0,08$
120. $F_{max} = 29$ N
121. Die Amplitude ist um das 7,4fache verringert
122. $b = 1,39$ s^{-1}; $T_0 = 0,497$ s
123. $k = 433$ kN m^{-1}
124. $x_0 = 0,07$ m
125. $f_2 = 45$ s^{-1}
126. $y = \frac{5}{3} x$
127. $\varphi_1 = 40° 14'$
128. $v = 1425$ m s^{-1}
129. $v_1 = 5065$ m s^{-1}; $v_2 = 3200$ m s^{-1}
130. $v_1 = 334$ m s^{-1}
131. $\varkappa = 1,56$
132. $v_H = 4590$ m s^{-1}
133. $\nu_0 = 319$ s^{-1}
134. Auf den 1,047fachen Wert erhöht
135. $l_0 = 0,30$ m
136. $J = 10^{-11}$ W cm^{-2}
137. $t_1 = 15$ °C; $t_2 = 140$ °C; $t_3 = -50$ °C
138. $\Delta l = 0,04$ cm
139. $d' = 4,04$ cm
140. $l = 186,024$ m
141. $n_2 - n_1 = 9,6$
142. $\Delta J = 24 \cdot 10^{-4}$ kg m^2
143. $\Delta p = 47$ atm $= 4,76$ MPa
144. $F = 179$ N
145. $\Delta t = 2$ K
146. $l_1 = 0,14\, l_2$
147. $\beta = 18,6 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}
148. Die Eintauchtiefe ist dann 0,635 h
149. $m = 4,8$ kg
150. $t = 1287$ °C
151. $t_m = 14,93$ °C
152. $m = 6$ kg
153. $t = 9,9$ °C
154. $m = 70,9$ g
155. $l = 536,7$ kcal kg^{-1} $= 2250$ kJ kg^{-1}
156. $m = 24,3$ g
157. $p = 72,6$ atm $\triangleq$ 55164 Torr $\triangleq$ 73,5 bar $\triangleq$ 7,35 MPa
158. a) $t = -91$ °C, b) $t = 273\,(n - 1)$ °C
159. $t = -53,25$ °C
160. $p = 705$ Torr $= 93923$ Pa
161. $V = 24,4$ l
162. $t_1 = 63,7$ °C
163. $m = 0,5$ kg
164. $\varrho = 2,34$ kg m^{-3}
165. $G = 72,28$ kp $= 710$ N
166. $t = 224$ °C
167. $v = 9,61$ m^3 kg^{-1}
168. Stickstoff
169. $V = 30,6$ l
170. Es wurden 95% der ursprünglichen Menge abgepumpt
171. $m = 2,6$ mg
172. $r = 1,5$ cm
173. $p = 193$ atm $= 19,6$ MPa
174. $p = 15,87$ atm $= 1,6$ MPa
175. $M = 29,7$ g mol^{-1}
176. $p_1 = 157$ Torr $= 20916$ Pa; $p_2 = 593$ Torr $= 7,9 \cdot 10^5$ Pa
177. $p = 39$ atm $= 3,96$ MPa; $p_1 = 2,98$ atm $= 0,302$ MPa; $p_2 = 2,05$ atm $= 0,208$ MPa; $p_3 = 0,39$ atm $= 39600$ Pa; $p_4 = 33,58$ atm $= 3,4$ MPa
178. a) $N = 3,35 \cdot 10^{25}$; b) $N = 8,41 \cdot 10^{22}$; c) $N = 8,44 \cdot 10^{22}$
179. a) $m = 9,3 \cdot 10^{-23}$ g; b) $m = 10,5 \cdot 10^{-23}$ g; c) $m = 9,7 \cdot 10^{-23}$ g
180. a) 830 m s^{-1}; 493 m s^{-1}; 52 m s^{-1}; b) 2195 m s^{-1}; 1304 m s^{-1}; 137 m s^{-1}
181. $W_k \approx 4,14 \cdot 10^{-16}$ J
182. $t_2 = -200$ °C
183. $n = 3,6 \cdot 10^{14}$
184. $t = 374$ °C
185. $\Delta W_k = -5,6 \cdot 10^{-21}$ J; $\Delta v = -895$ m s^{-1}

186. a) $1845\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $1504\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $1697\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; b) $1304\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $1063\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $1200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; c) $460\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $375\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $423\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

187. $\bar{v} = \sqrt{\frac{3v_0^2}{\varkappa}}$; $v_m = v_0\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}$

188. a) $U = \frac{3}{2}pV$; b) $U = \frac{5}{2}pV$

189. a) $l_{N_2} = 6{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$; $l'_{N_2} = 8{,}4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$; $l_{He} = 13{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$; $l'_{He} = 17{,}3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}$; b) $Z_N = 7{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}}$; $Z'_N = 5{,}4 \cdot 10^9\ \mathrm{s^{-1}}$; $Z_{He} = 9{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}}$; $Z'_{He} = 7{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{s^{-1}}$

190. $d = 2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$

191. $p = 7{,}9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Torr} = 0{,}105\ \mathrm{Pa}$; $n = 9{,}45 \cdot 10^{16}$

192. $\eta = \eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}$; $\eta = 2{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{g\,cm^{-1}s^{-1}}$

193. $\Delta t = 3{,}25\ \mathrm{K}$

194. $J = 4{,}13\ \mathrm{J\,cal^{-1}}$

195. $c_v = \frac{R}{M(\varkappa - 1)} = 0{,}176\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}} = 737\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $c_p = \varkappa\frac{R}{M(\varkappa - 1)} = 0{,}2464\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}} = 1032\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$

196. $M = 28{,}45\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$

197. $\varkappa = 1{,}36$

198. $Q = 23{,}9\ \mathrm{cal} = 100\ \mathrm{J}$

199. $m = 23{,}43\ \mathrm{g}$

200. $t = 10\ \mathrm{°C}$

201. $U_2 - U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} \times (p_2V_2 - p_1V_1)$; a) $\Delta U = 152\ \mathrm{J}$; b) $\Delta U = 253{,}25\ \mathrm{J}$

202. $c_v = 0{,}177\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}} = 740\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$; $c_p = \varkappa c_v = 0{,}248\ \mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}} = 1038\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$

203. $Q = 222{,}1\ \mathrm{cal} = 929{,}9\ \mathrm{J}$; $W = 266{,}7\ \mathrm{J}$; $\Delta l = 0{,}466\ \mathrm{m}$

204. $t = 227\ \mathrm{°C}$

205. $Q = 206\ \mathrm{kJ}$; $\Delta U = 147\ \mathrm{kJ}$; $W = 59\ \mathrm{kJ}$

206. Sauerstoff; $\Delta U = 1086\ \mathrm{cal} = 4547\ \mathrm{J}$; $Q = 650\ \mathrm{cal} = 2722\ \mathrm{J}$

207. $W = 2{,}3\ p_0Al_0$

208. $Q = p_0v_0 \ln\frac{V}{V_0} = 52\ \mathrm{cal} = 217\ \mathrm{J}$; $p = 0{,}2\ \mathrm{kp\,cm^{-2}} = 1{,}96 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$

209. $\lg V_2 = \lg V_1 - \frac{Q'}{2{,}3\ p_1V_1}$; $V_2 = 0{,}427\ \mathrm{l}$; $p_2 = 7800\ \mathrm{Torr} = 1{,}04\ \mathrm{MPa}$

210. $p_0 = 20{,}9\ \mathrm{N\,cm^{-2}}$

211. $Q = 742\ \mathrm{kcal\,h^{-1}} = 3100\ \mathrm{kJ\,h^{-1}}$

212. a) $W \approx 183\ \mathrm{kJ}$; b) $W \approx 185\ \mathrm{kJ}$

213. a) $p_1 = 32{,}8\ \mathrm{atm} = 3{,}32\ \mathrm{MPa}$; $p_2 = 12{,}3\ \mathrm{atm} = 1{,}25\ \mathrm{MPa}$; $p_3 = 9{,}84\ \mathrm{atm} = 0{,}997\ \mathrm{MPa}$; $p_4 = 8{,}2\ \mathrm{atm} = 0{,}83\ \mathrm{MPa}$; b) $p'_1 = 36{,}8\ \mathrm{atm} = 3{,}73\ \mathrm{MPa}$; $p'_2 = 9{,}32\ \mathrm{atm} = 0{,}945\ \mathrm{MPa}$; $p'_3 = 6{,}82\ \mathrm{atm} = 0{,}69\ \mathrm{MPa}$; $p'_4 = 5{,}28\ \mathrm{atm} = 0{,}535\ \mathrm{MPa}$

214. $W = 1564\ \mathrm{J}$; $\Delta U = 1564\ \mathrm{J}$; $t = 283\ \mathrm{°C}$

215. $p = 7{,}98\ \mathrm{atm} = 0{,}81\ \mathrm{MPa}$; $t = 266{,}6\ \mathrm{°C}$; $\Delta U = 3064\ \mathrm{J}$

216. $t = 198\ \mathrm{°C}$; $p = 1169\ \mathrm{Torr} = 156000\ \mathrm{Pa}$; $W = 1640\ \mathrm{J}$

217. $t = -75{,}8\ \mathrm{°C}$; $p = 0{,}36\ \mathrm{atm} = 36500\ \mathrm{Pa}$

218. a) $Q = -2655\ \mathrm{cal} = -11{,}1\ \mathrm{kJ}$; $W = 0$; $\Delta U = -11098\ \mathrm{cal} = -46{,}3\ \mathrm{kJ}$; b) $W = Q = 5118\ \mathrm{J}$; $\Delta U = 0$; c) $\Delta U = -3507\ \mathrm{J}$; $W = 350\ \mathrm{J}$; $Q = 0$;

219. $\eta = 32{,}4\%$

220. $t_1 = 60\ \mathrm{°C}$; $t_2 = 20\ \mathrm{°C}$

221. $t_2 = 47\ \mathrm{°C}$

222. $P = 4{,}18\ \mathrm{kW}$; $Q_1 = 11\ \mathrm{kcal\,s^{-1}} = 46\ \mathrm{kJ\,s^{-1}}$

223. $\Delta S = 4{,}13 \text{ cal K}^{-1} = 17{,}3 \text{ J K}^{-1}$

224. $S_2 - S_1 = 0{,}31 \text{ cal K}^{-1} = 1{,}29 \text{ J K}^{-1}$; $S_3 - S_1 = 1{,}76 \text{ cal K}^{-1} = 7{,}35 \text{ J K}^{-1}$

225. $S_2 - S_1 = 9{,}4 \text{ cal K}^{-1} = 39{,}3 \text{ J K}^{-1}$

226. $\Delta S = 41 \text{ cal K}^{-1} = 171 \text{ J K}^{-1}$

227. $\Delta S = -0{,}0573 \text{ cal K}^{-1} = 0{,}24 \text{ J K}^{-1}$

228. $\Delta S = 0{,}02 \text{ cal K}^{-1} = 0{,}08 \text{ J K}^{-1}$

229. $F_2 - F_1 = 4{,}6 \text{ kJ}$; $G_2 - G_1 = 4{,}6 \text{ kJ}$

230. $f = 1$

231. $f = 0$; das System ist invariant; Gleichgewicht herrscht nur im Tripelpunkt

232. $t_0 = -0{,}0075 \text{ °C}$

233. $p = 733 \text{ Torr} = 97\,600 \text{ Pa}$

234. $v_2 = 21{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$

235. $p_a = 4 \text{ atm} = 405\,300 \text{ Pa}$; $p_b = 3{,}89 \text{ atm} = 394\,000 \text{ Pa}$

236. Diagramme

237. $t_1 = 100 \text{ °C}$; $t_2 = 50{,}1 \text{ °C}$

238. $W = 182 \text{ J mol}^{-1}$

239. $a = 1{,}345 \text{ l}^2 \text{ atm mol}^{-2}$; $b = 0{,}032 \text{ l mol}^{-1}$

240. $p_k = 72{,}1 \text{ atm} = 7{,}3 \text{ MPa}$; $t_k = 29{,}5 \text{ °C}$

241. $W = 6042{,}5 \text{ J}$

242. a) $v_A = 0{,}059$; $v_B = 0{,}941$
b) $c_1 = 3{,}5 \text{ mol kg}^{-1}$; $c_2 = 3{,}1 \text{ mol l}^{-1}$

243. a) $c_1 = 6{,}5 \text{ mol kg}^{-1}$; $v_A = 0{,}1046$
b) $c_2 = 52{,}4\%$; $v_B = 0{,}8954$

244. $p_1 = 29{,}5 \text{ Torr} = 3930 \text{ Pa}$; $p_2 = 20{,}3 \text{ Torr} = 2700 \text{ Pa}$; $p = 49{,}8 \text{ Torr} = 6650 \text{ Pa}$

245. $p = 758 \text{ Torr} = 0{,}101 \text{ MPa}$

246. $t = 17 \text{ °C}$

247. $m = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

248. $E_g = 1{,}86 \text{ l K mol}^{-1}$; $E_s = 0{,}52 \text{ l K mol}^{-1}$

249. $m = 9{,}9 \text{ g}$

250. $t_0 = -0{,}54 \text{ °C}$; $t_1 = 100{,}15 \text{ °C}$

251. $Q = 18 \text{ kcal h}^{-1} = 75 \text{ kJ h}^{-1}$

252. $t_1 = 103{,}6 \text{ °C}$

253. $Q = 525 \text{ kcal} = 2200 \text{ kJ}$; $Q_1 = 0{,}55\,Q$

254. $\Delta t = 11 \text{ K}$

255. $d = 3{,}6 \text{ cm}$

256. $Q = 650{,}8 \text{ kcal} = 2725 \text{ kJ}$

257. $t' = \dfrac{\lambda t_1 + \alpha d t_2}{\lambda + \alpha d}$

Tabellenanhang

Tabelle 1: **Wichtige physikalische Konstanten**

Mittlere Fallbeschleunigung	g_n	$= 9{,}80665 \text{ m s}^{-2}$
Näherungswert	g	$= 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$
Gravitationskonstante	γ	$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Allgemeine Gaskonstante	R	$= 8{,}314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} =$ $= 0{,}08205 \text{ l atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} =$ $= 1{,}986 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
AVOGADROsche Konstante	N_A	$= 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molvolumen	V_0	$= 22{,}414 \text{ l}$
BOLTZMANN-Konstante	k	$= R/N = 1{,}3806 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Mechanisches Wärmeäquivalent	J	$= 4{,}186 \text{ J cal}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$= 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$= 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
FARADAY-Konstante	F	$= 96\,485 \text{ As mol}^{-1}$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$= 2{,}99792 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
PLANCKsches Wirkungsquantum	h	$= 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
STEFAN-BOLTZMANN-Konstante	σ	$= 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$
Konstante im WIENschen Verschiebungsgesetz	b	$= 0{,}00289 \text{ m K}$
Elementarladung des Elektrons	e_0	$= -1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
Ruhmasse des Elektrons	m_0	$= 9{,}109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5{,}498 \cdot 10^{-4} \text{ u}$
Ruhmasse des Protons	m_p	$= 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}00758 \text{ u}$
Ruhmasse des Neutrons	m_n	$= 1{,}6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}00895 \text{ u}$
Ruhmasse des α-Teilchens	m_α	$= 6{,}6428 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4{,}002763 \text{ u}$
Ruhmasse des Deuterons	m_d	$= 3{,}342 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2{,}014172 \text{ u}$
Masse des H-Atoms	m_H	$= 1{,}6734 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1{,}008128 \text{ u}$
BOHRsches Magneton	μ_B	$= 1{,}165 \cdot 10^{-29} \text{ Jm A}^{-1}$
RYDBERG-Zahl	R	$= 10973732 \text{ m}^{-1}$
Atomare Masseneinheit	1 u	$= 1{,}66053 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Energieäquivalent der atomaren Masseneinheit	ΔE_{1u}	$= 931{,}8 \text{ MeV}$

Tabelle 2: **Bezeichnungen und Einheiten der verwendeten physikalischen Größen**

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Länge, Wegstrecke	l, s	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Fläche	A		m^2
Volumen	V		m^3
Dichte	ϱ		$kg\,m^{-3}$
Spezifisches Volumen	v		$m^3\,kg^{-1}$
Geschwindigkeit	v, c		$m\,s^{-1}$
Beschleunigung	a, g		$m\,s^{-2}$
Winkelgeschwindigkeit	ω		s^{-1}
Winkelbeschleunigung	α		s^{-2}
Frequenz	f, ν		s^{-1}
Periodendauer	T		s
Kraft, Gewichtskraft	F, G	Newton	$N = kg\,m\,s^{-2}$
Druck	p		$N\,m^{-2}$
Arbeit, Energie	W, E	Joule	$J = kg\,m^2\,s^{-2}$, Nm
Leistung	P	Watt	$W = J\,s^{-1}$
Impuls, Bewegungsgröße	p		Ns
Drehmoment	M		J, Nm
Massenträgheitsmoment	J		$kg\,m^2$
Drehimpuls	L		$kg\,m^2\,s^{-1}$
Zugelastizitätsmodul	E		$N\,m^{-2}$
Schubelastizitätsmodul	G		$N\,m^{-2}$
Oberflächenspannung	σ		$N\,m^{-1}$, $J\,m^{-2}$
Viskosität	η		$kg\,m^{-1}\,s^{-1}$
Molmasse	M		$kg\,mol^{-1}$
Temperatur	T, t	Kelvin	K, °C
Wärmemenge	Q	Joule	J, kJ
Spezifische Wärmekapazität	c, c_p, c_v		$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$
Molwärme	C, C_p, C_v		$J\,K^{-1}\,mol^{-1}$
Umwandlungswärme	l		$J\,kg^{-1}$
Innere Energie	U		J
Enthalpie	H		J
Entropie	S		$J\,K^{-1}$
Freie Energie	F		J
Potentielle thermodynamische Energie	G		J
Osmotischer Druck	π		$N\,m^{-2}$
Wärmeleitfähigkeit	λ		$J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}$

Größe	Bezeichnung der Größe	Einheit im Internat. System	Kurzzeichen der Einheit
Wärmeübergangszahl	α		$\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-1}}$
Elektrische Ladung	Q, q, e	Coulomb	$\mathrm{C = As}$
Elektrische Feldstärke	E		$\mathrm{V\,m^{-1}}$
Ladungsdichte			
der Fläche	σ		$\mathrm{C\,m^{-2}}$
des Volumens	ϱ		$\mathrm{C\,m^{-3}}$
Elektrisches Potential	φ	Volt	$\mathrm{V = J\,A^{-1}\,s^{-1}}$
Elektrischer Kraftfluß	Ψ		Vm
Dielektrische Verschiebung	D		$\mathrm{As\,m^{-2}}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0		$\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Dielektrizitätszahl	ε_r		
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon$		$\mathrm{As\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Kapazität	C	Farad	$\mathrm{F = As\,V^{-1}}$
Energiedichte im			
elektrischen Feld	ϱ_E		$\mathrm{J\,m^{-3}}$
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
Potentialdifferenz	U, φ		V
Stromdichte	i		$\mathrm{A\,m^{-2}}$
Elektrischer Widerstand	R	Ohm	$\Omega = \mathrm{V\,A^{-1}}$
Spezifischer Widerstand	ϱ		$\Omega\,\mathrm{m}$
Spezifische Leitfähigkeit	$\varkappa$		$\Omega^{-1}\,\mathrm{m^{-1}}$
Temperaturkoeffizient des			
elektrischen Widerstands	α		$\mathrm{K^{-1}}$
Elektromotorische Kraft	E		V
Elektrochemisches Äquivalent	$\ddot{A}$		$\mathrm{kg\,A^{-1}\,s^{-1}}$
Magnetischer Induktionsfluß	Φ	Weber	$\mathrm{Wb = Vs}$
Magnetische Induktion	B	Tesla	$\mathrm{T = Vs\,m^{-2} = Wb\,m^{-2}}$
Magnetische Feldstärke	H		$\mathrm{A\,m^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0		$\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Permeabilitätszahl	μ_r		
Permeabilität	$\mu = \mu_0\mu_r$		$\mathrm{Vs\,A^{-1}\,m^{-1}}$
Magnetischer Widerstand	R_m		$\mathrm{A\,Wb^{-1}}$
Induktivität	L	Henry	$\mathrm{H = Vs\,A^{-1}}$
Lichtstrom	Φ	Lumen	lm
Lichtstärke	I	Candela	cd
Beleuchtungsstärke	E	Lux	lx
Brennweite	f		m
Brechkraft	D	Dioptrie	$\mathrm{dpt = m^{-1}}$
Brechzahl	n		
Halbwertzeit	$T_{1/2}$		s
Zerfallskonstante	λ		$\mathrm{s^{-1}}$

Tabelle 3: Dichte ϱ

a) Feste Stoffe in kg m^{-3}

Aluminium	$2{,}7 \cdot 10^3$	Blei	$11{,}3 \cdot 10^3$
Natriumchlorid	$2{,}17 \cdot 10^3$	Glas	$2{,}5 \cdot 10^3$
Eis	$0{,}92 \cdot 10^3$	Silber	$10{,}5 \cdot 10^3$
Kupfer	$8{,}9 \cdot 10^3$	Zink	$7{,}1 \cdot 10^3$
Messing	$8{,}5 \cdot 10^3$	Eisen (Stahl)	$7{,}8 \cdot 10^3$
Nickel	$8{,}8 \cdot 10^3$	Wolfram	$19{,}1 \cdot 10^3$

b) Flüssigkeiten in kg m^{-3}

Äther	$0{,}714 \cdot 10^3$	Quecksilber	$13{,}6 \cdot 10^3$
Spiritus	$0{,}79 \cdot 10^3$	Petroleum	$0{,}8 \cdot 10^3$
Meereswasser	$1{,}03 \cdot 10^3$	Wasser	$1{,}0 \cdot 10^3$

c) Gase (im Normalzustand) in kg m^{-3}

Stickstoff	1,251	Sauerstoff	1,428
Helium	0,178	Wasserstoff	0,0899
Kohlendioxid	1,977	Luft	1,293

Tabelle 4: **Oberflächenspannung σ in N m^{-1}**

Quecksilber	0,49	Terpentin	0,027
Spiritus	0,022	Wasser bei 20 °C	0,07

Tabelle 5: **Schallgeschwindigkeit c in m s^{-1}**

Sauerstoff	317,2	Wasser	1450
Stahl	5100	Wasserstoff	1272
Luft bei 0 °C	332		

Tabelle 6: **Ausdehnungskoeffizient in K^{-1}**

a) Längenausdehnung α

Aluminium	$24 \cdot 10^{-6}$	Glas	$10 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$17 \cdot 10^{-6}$	Zink	$29 \cdot 10^{-6}$
Messing	$19 \cdot 10^{-6}$	Eisen (Stahl)	$12 \cdot 10^{-6}$

b) Volumenausdehnung β

Spiritus	$110 \cdot 10^{-5}$	Quecksilber	$18{,}2 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 7: **Spezifische Wärmekapazität c in kcal kg^{-1} K^{-1}**

a) Feste und flüssige Stoffe

Aluminium	0,214
Eis	0,50
Gußeisen	0,13
Spiritus	0,59
Kupfer	0,091
Messing	0,093
Platin	0,032
Öl (Durchschnittswert)	0,4
Blei	0,03
Quecksilber	0,035
Zink	0,092
Eisen (Stahl)	0,11

b) Gase	c_v	$\varkappa$
Argon	0,0762	1,66
Stickstoff	0,177	1,41
Helium	0,753	1,66
Kohlendioxid	0,156	1,30
Kohlenmonoxid	0,178	1,40
Sauerstoff	0,155	1,40
Wasserstoff	2,42	1,41
Luft	0,174	1,40

Tabelle 8: **Schmelztemperaturen t_0 und Schmelzwärmen l einiger Stoffe bei $p = 1$ atm = = 1,01325 · 10⁵ Pa**

	t_0 in °C		l in kcal kg^{-1}
Zinn	231,9	Zinn	140,0
weißer Phosphor	44,2	weißer Phosphor	5,4
Aluminium	658,0	Aluminium	94,0
Eis	0,0	Eis	79,7
Blei	327,0	Blei	5,0
Quecksilber	−38,9	Quecksilber	2,8

Die Siedewärme des Wassers bei einer Temperatur von 100 °C und einem Druck von 760 Torr beträgt 539 kcal kg^{-1}.

Tabelle 9: **van-der-Waalssche Konstanten a, b**

Stoff	a in J m^3 kmol^{-2}	Stoff	b in m^3 kmol^{-1}
CO_2	$3{,}65 \cdot 10^5$	CO_2	0,043
H_2O	$5{,}54 \cdot 10^5$	H_2O	0,03
N_2	$1{,}32 \cdot 10^5$	N_2	0,04
O_2	$1{,}37 \cdot 10^5$	O_2	0,03

Die kryoskopische Konstante des Wassers ist $K = 1{,}86$ grd mol^{-1}.
Die ebullioskopische Konstante des Wassers ist $E = 0{,}52$ grd mol^{-1}.

Tabelle 10: **Wärmeleitfähigkeit λ bei 18 °C**

λ in kcal K^{-1} m^{-1} s^{-1}		λ in kcal K^{-1} m^{-1} h^{-1}	
Aluminium	0,05	Asbest	0,18
Kupfer	0,095	Heraklit	0,062
Eisen (Stahl)	0,014	Putz	0,6
		Kesselstein	2,0
		Ruß	0,07
		Ziegel	0,45

Tabelle 11: **Wärmeübergangszahlen α in kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1}**

Rauchgase – Asche	15
Kesselstein – Wasser	4000

Tabelle 12: **Tabelle der chemischen Elemente**

(nach ihren chemischen Zeichen alphabetisch geordnet)

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse	chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Ac	Aktinium	89	227,05	Hf	Hafnium	72	178,5
Ag	Silber	47	107,87	Hg	Quecksilber	80	200,59
Al	Aluminium	13	26,98	Ho	Holmium	67	164,93
Am	Amerizium	95	243	In	Indium	49	114,82
Ar	Argon	18	39,948	Ir	Iridium	77	192,2
As	Arsen	33	74,92	J	Jod	53	126,904
At	Astatin	85	210	K	Kalium	19	39,10
Au	Gold	79	196,97	Kr	Krypton	36	83,80
B	Bor	5	10,81	Ku	Kurtschatovium	104	264
Ba	Barium	56	137,34	La	Lanthan	57	138,91
Be	Beryllium	4	9,012	Li	Lithium	3	6,941
Bi	Wismut	83	208,98	Lr	Lawrenzium	103	257*
Bk	Berkelium	97	245	Lu	Lutetium	71	174,97
Br	Brom	35	79,904	Md	Mendelevium	101	256*
C	Kohlenstoff	6	12,011	Mg	Magnesium	12	24,305
Ca	Kalzium	20	40,08	Mn	Mangan	25	54,938
Cd	Kadmium	48	112,40	Mo	Molybdän	42	95,94
Ce	Zer	58	140,12	N	Stickstoff	7	14,0067
Cf	Kalifornium	98	246	Na	Natrium	11	22,9898
Cl	Chlor	17	35,453	Nb	Niob(ium)	41	92,906
Cm	Curium	96	243	Nd	Neodym	60	144,24
Co	Kobalt	27	58,93	Ne	Neon	10	20,179
Cr	Chrom	24	51,996	Ni	Nickel	28	58,71
Cs	Zäsium	55	132,91	No	Nobelium	102	254*
Cu	Kupfer	29	63,546	Np	Neptunium	93	237
Dy	Dysprosium	66	162,50	O	Sauerstoff	8	15,9994
Er	Erbium	68	167,26	Os	Osmium	76	190,2
Es	Einsteinium	99	254*	P	Phosphor	15	30,9738
Eu	Europium	63	151,96	Pa	Protaktinium	91	231
F	Fluor	9	19,00	Pb	Blei	82	207,2
Fe	Eisen	26	55,85	Pd	Palladium	46	106,4
Fm	Fermium	100	253*	Pm	Promethium	61	145
Fr	Franzium	87	223	Po	Polonium	84	210,0
Ga	Gallium	31	69,72	Pr	Praseodym	59	140,908
Gd	Gadolinium	64	157,25	Pt	Platin	78	195,09
Ge	Germanium	32	72,59	Pu	Plutonium	94	242
H	Wasserstoff	1	1,008	Ra	Radium	88	226,05
He	Helium	2	4,003	Rb	Rubidium	37	85,47

Tabelle 12: Fortsetzung

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Re	Rhenium	75	186,2
Rh	Rhodium	45	102,905
Rn	Radon	86	222
Ru	Ruthenium	44	101,07
S	Schwefel	16	32,06
Sb	Antimon	51	121,75
Sc	Skandium	21	44,959
Se	Selen	34	78,96
Si	Silizium	14	28,086
Sm	Samarium	62	150,4
Sn	Zinn	50	118,69
Sr	Strontium	38	87,62
Ta	Tantal	73	180,948
Tb	Terbium	65	158,925

chem. Zeichen	Element	Ordnungszahl	relative Atommasse
Tc	Technetium	43	98,913
Te	Tellur	52	127,60
Th	Thorium	90	232,038
Ti	Titan	22	47,90
Tl	Thallium	81	204,37
Tm	Thulium	69	168,934
U	Uran	92	238,03
V	Vanadin	23	50,941
W	Wolfram	74	183,85
Xe	Xenon	54	131,3
Y	Yttrium	39	88,905
Yb	Ytterbium	70	173,04
Zn	Zink	30	65,37
Zr	Zirkonium	40	91,22

*) Bei den so bezeichneten Atommassen handelt es sich jeweils um die Kernmassenzahl des stabilsten Isotops

Sachwortverzeichnis

Fachlexikon ABC Physik

Ein alphabetisches Nachschlagewerk

2 Bände. 1974. 1784 Seiten. Etwa 12000 Stichwörter. 2000 Abbildungen im Text und auf 64, teilweise farbigen Tafeln. Zahlreiche Tabellen, Schemata, graphische Darstellungen und Literaturangaben. 18 cm × 24,5 cm. Kunstleder

Das zweibändige Werk gibt in alphabetisch geordneten Einzelartikeln einen Überblick über das Gesamtgebiet der gegenwärtigen Physik und ihrer Spezialdisziplinen in der vielfältigen Verflechtung und gegenseitigen Abgrenzung zu den Nachbargebieten. Zusammenhängende Großartikel und kürzere Einzeldarstellungen geben Einblick in moderne physikalische Forschungs- und Arbeitsrichtungen sowie in den weiten technischen Anwendungsbereich der Physik. Die physikalischen Zusammenhänge der den Menschen umgebenden Erscheinungen werden wissenschaftlich einwandfrei und weitgehend allgemeinverständlich erläutert, um einem möglichst großen Benutzerkreis die rasche Orientierung zu erleichtern. Da viele Ergebnisse und Gesetzmäßigkeiten der modernen Physik nur in der Ausdrucksweise der Mathematik präzise zu erklären sind, werden die verwendeten mathematischen Ausdrücke selbst in besonderen Artikeln erläutert.
Das „Fachlexikon ABC Physik" wendet sich an alle Leser, die in und neben dem Beruf an der Erläuterung physikalischer Begriffe interessiert sind, an Oberschüler, an Studierende naturwissenschaftlicher und technischer Fachrichtungen, an Lehrer und Dozenten sowie an wissenschaftlich oder praktisch tätige Fachleute, die sich schnell und zuverlässig informieren wollen.

Weitere Bände unserer Lexika-Reihe:

Fachlexikon ABC Technik und Naturwissenschaft. Ein alphabetisches Nachschlagewerk. 2 Bände. 1970. 1213 Seiten. Etwa 16000 Stichwörter. Etwa 1400 Abbildungen im Text und auf 51 teilweise farbigen Tafeln. Zahlreiche Tabellen, Schemata, graphische Darstellungen und Literaturangaben. 18 cm × 24,5 cm. Kunstleder

Fachlexikon ABC Chemie. Ein alphabetisches Nachschlagewerk. 2 Bände. 1970. 2., verbesserte Auflage. 1590 Seiten. Etwa 12000 Stichwörter. Etwa 800 Abbildungen im Text und auf 40 teilweise farbigen Tafeln. Zahlreiche Tabellen, Schemata, graphische Darstellungen und Literaturangaben. 18 cm × 24,5 cm. Kunstleder

Fachlexikon ABC Biologie. Ein alphabetisches Nachschlagewerk. 1972. 2., durchgesehene Auflage. 916 Seiten. Etwa 5000 Stichwörter. Etwa 950 Abbildungen im Text und auf 32 teilweise farbigen Tafeln. Zahlreiche Tabellen, Schemata, graphische Darstellungen und Literaturangaben. 18 cm × 24,5 cm. Kunstleder

Taschenlexikon Molekularbiologie. Ein alphabetisches Nachschlagewerk. 1972. 356 Seiten. 8 einfarbige Bildtafeln. 90 Strichzeichnungen im Text. 40 Formeln und Tabellen. 13 cm × 19 cm. Leinen

Taschenlexikon Elektronik – Funktechnik. Ein alphabetisches Nachschlagewerk. 1974. 4., durchgesehene Auflage. 320 Seiten. Zahlreiche Abbildungen, Tabellen und Tafeln. Tafelteil als Anhang. 13 cm × 19 cm. Leinen

Verlag Harri Deutsch • Zürich • Frankfurt am Main • Thun

Ralf Sube und Günther Eisenreich

Wörterbuch Physik

In vier Sprachen: Englisch – Deutsch – Französisch – Russisch

3 Bände. 1973. 2895 Seiten. Über 75000 Fachbegriffe in jeder Sprache. 17 cm × 24,5 cm. Kunstleder in Schuber

Das Werk enthält in jeder Sprache über 75000 Fachbegriffe aus den Gebieten Akustik (Elektroakustik, physikalische Akustik, Ultra- und Infraschall) – Astrophysik – Biophysik (Elektrobiologie, Molekularbiologie, Strahlenbiologie) – Elektromagnetisches Feld (Elektrizität, Elektrodynamik, Elektrostatik, Magnetismus, Quantenelektrodynamik) – Geophysik – Mechanik (Kinematik, Dynamik, Statik) – Metrologie – Optik (geometrische und physikalische Optik, Quantenoptik) – Physikalische Chemie – Relativitätstheorie – Struktur der Materie (Atomphysik, Festkörperphysik, Kernphysik, Molekularphysik, Physik der Flüssigkeiten und Gase, Plasmaphysik) – Wärmelehre (Hochtemperaturphysik, Thermodynamik, Tieftemperaturphysik, Wärmeübertragung).

Dieses Werk, das wegen der erheblichen Terminologiefülle der behandelten Gebiete in drei Bänden herausgegeben werden mußte, wendet sich an einen breiten Kreis von Fachleuten, die mit der Übersetzung und Auswertung von Literatur auf dem Gebiet der theoretischen und angewandten Physik im In- und Ausland konfrontiert werden.

Der Autor, Dipl.-Math. Ralf Sube, der Fachwelt bereits durch sein Wörterbuch „Kernphysik und Kerntechnik" bekannt, hat zusammen mit Prof. Dr. rer. nat. habil. Günther Eisenreich in mühevoller Kleinarbeit auf der Grundlage umfangreichen originalsprachigen Quellenmaterials ein an Wortstellen- und Synonymreichtum auf dem Gebiet der Fachwörterbücher wohl schwer zu übertreffendes Werk geschaffen, das sowohl den fachsprachlich interessierten Theoretikern als auch den auf zahlreichen Gebieten tätigen Praktikern eine große Hilfe bei der Bewältigung ihrer Aufgaben sein wird.

Die einzelnen Wortstellen sind nach dem bewährten System vielsprachiger Wörterbücher alphabetisch geordnet. Die Anordnung der aufgenommenen Sprachen gestattet ein bequemes Übersetzen aus jeder in jede der enthaltenen Sprachen bei minimalen Zugriffszeiten. Durch zahlreiche Hinweise über den Anwendungsbereich einzelner Synonyme durch Anführen von Fachgebietshinweisen wurde erreicht, daß dem Benutzer, Grundkenntnisse der jeweiligen Sprache vorausgesetzt, die Wahl des richtigen Äquivalents erleichtert wird.

Das Wortgut wurde in jeder Sprache in der jeweiligen Originalliteratur belegt, wodurch ein hoher Grad an Genauigkeit erreicht werden konnte.

Verlag Harri Deutsch • Zürich • Frankfurt am Main • Thun

Heinz Schilling

Elektromagnetische Felder und Wellen

1974. 386 Seiten. 112 durchgerechnete Beispiele. 299 Aufgaben mit Lösungen. 17 cm × 23 cm. Styx

Dieser Band ist die Fortführung des Titels „Physik in Beispielen" von V. Hajko, der jetzt in zwei Paperbacks (Teil I: Mechanik und Wärmelehre – Teil II: Elektrik – Optik – Quantentheorie) erscheint.

Die Darstellung physikalischer Effekte an Hand technischer Beispiele macht es besonders bei den elektrischen Erscheinungen erforderlich, Grundbegriffe aus der Elektrotechnik einzuführen. Neben den rein physikalischen Betrachtungen über Elektronen und Ionen und über elektrische und magnetische Größen in statischen, stationären, nieder- und hochfrequenten Feldern werden daher auch die Elemente der Vierpoltheorie, der Vorgänge in Kabeln und Leitungen und der Sende-, Empfangs- und Transistortechnik behandelt.

Wie in den vorangegangenen Bänden ist jeder Abschnitt in drei Teile untergliedert: einen kurzgehaltenen Lehrtext über die theoretischen Grundlagen, die ausführliche Lösung systematisch ausgewählter Probleme bis zum numerischen Ergebnis und eine große Zahl von Aufgaben mit Angabe der Lösungen am Schluß des Buches.

Kleine Enzyklopädie Mathematik

Herausgegeben von W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich und H. Kästner. 1972. Neuauflage. 837 Seiten. 950 Textabbildungen, davon über 700 mehrfarbig. 72 Bildtafeln als Anhang. 16 cm × 22 cm. Kunstleder

Dieses Werk gibt eine Einführung in die Mathematik. Unterstützt von rund 950 Abbildungen, werden dem Leser nicht nur alle Grundlagen vermittelt; in zahlreichen durchgerechneten Beispielen werden die wichtigsten Anwendungen geschildert und die Wege zu aktuellen Sondergebieten erschlossen, in die er dann selbständig eindringen kann.

Internationale Mathematische Nachrichten (Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft), Wien (1972, Nr. 102): „Die Herausgeber haben sich bemüht, ‚dem Bedürfnis weitester Kreise nach möglichst rascher und sicherer Information über die Gebiete der Mathematik und zugleich nach leichtverständlicher Darstellung zu entsprechen', und man darf ruhig sagen, daß dieses Vorhaben vollauf geglückt ist. Sie führen in den ersten beiden Hauptteilen durch Elementarmathematik und Höhere Mathematik und geben im dritten Teil einen Einblick in wichtige Spezialdisziplinen. Das Buch ist keine reine Formelsammlung, sondern vermittelt den Stoff zusammenhängend, wobei die geschichtliche Entwicklung weitgehend berücksichtigt wurde; es läßt auch die tragende Rolle erkennen, die der Mathematik in Naturwissenschaft und Technik zukommt."

Verlag Harri Deutsch • Zürich • Frankfurt am Main • Thun

Wenn Sie eine technische oder naturwissenschaftliche Fachrichtung studieren, werden Sie ständig mit Aufgaben konfrontiert, für die Sie Lösungen finden sollen. Die Fähigkeit, Probleme physikalisch-technischer Art zu erfassen und zu lösen, erwerben Sie aber nicht durch Besuch einer Vorlesung und können Sie auch nur in beschränktem Umfange aus dem Lehrbuch erlernen – es kommt vor allem auf intensives, ständiges *Üben* an.
Ein Hilfsmittel für derartige Übungen will dieses Buch sein; es versucht, eine Brücke zwischen der Theorie des Lehrgebietes und der Praxis des Aufgabenrechnens zu schlagen.
In ihm sind 457 Beispiele und Aufgaben aus den Gebieten *Mechanik, Wärmelehre* und *Molekularphysik* enthalten. Etwa 40% davon sind als Beispiele ausführlich durchgerechnet, während Sie zu den übrigen Aufgaben die Ergebnisse am Schluß des Buches finden.
Jedem Abschnitt ist ein kurzer Lehrtext vorangestellt, in dem die wichtigsten Begriffe, Definitionen und Gesetze des betreffenden Gebietes zusammengefaßt werden. Damit ist Ihnen die Möglichkeit gegeben, sich den im Unterricht angeeigneten Stoff ins Gedächtnis zurückzurufen, ohne daß Sie erst in anderen Büchern suchen müssen.
Für die *Beispiele* wurden nach Möglichkeit solche Themen gewählt, die nicht nur die physikalische Idee oder einen geschickten Lösungsweg demonstrieren, sondern auch für Sie als Wissenschaftler oder Techniker von praktischer Bedeutung sind.
Sind Sie Dozent oder Lehrer, so finden Sie in diesem Buch Material zur Gestaltung von Übungen.
Das Werk wurde von sechs Dozenten am Lehrstuhl für Physik der Universität Košice unter Leitung von Prof. Dr. rer. nat. *Vladimir Hajko* verfaßt und ist nicht nur in der ČSSR sehr gefragt.